TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu –tutkielma

Antti Ikäläinen

FRAKTAALIGEOMETRIAN KURSSI YLÄKOULUSSA

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Maaliskuu 2013

Tampereen yliopisto

Informatieteiden yksikkö

IKÄLÄINEN ANTTI: Fraktaaligeometrian kurssi yläkoulussa

Pro gradu –tutkielma, 52 s.

Maaliskuu 2013

Tiivistelmä

Tässä pro gradu –tutkimuksessa on laadittu yläkoululle fraktaaligeometrian kurssi. Lähtökohtana on ollut Tampereen klassillisessa koulussa 7. – 9. luokille lukuvuosina 2001-2010 pidetyt oppitunnit. Näiden oppituntien perusteella huomattiin, että fraktaaligeometrian kurssi sopii yläkoulussa parhaiten 9. luokan viimeiseksi kurssiksi. Tutkimukseen sisältyvät tuntitehtävät ja -selostukset perustuvat kahdelle 9. luokalle lukuvuosina 2008-2010 pidettyihin oppitunteihin. Myös johtopäätökset on tehty näiden oppituntien perusteella. Tutkimusta tehtäessä huomattiin, että fraktaaligeometrian tehtävien suorittaminen vaati funktioiden, äärettömyyden, raja-arvon ja suppenemisen perustelemista oppilaille. Nykyisissä yläkoulun matematiikan opetussuunnitelmissa ei näitä matemaattisia käsitteitä perustella riittävästi. Sen vuoksi laadittiin fraktaaligeometrian kurssia edeltäviä oppitunteja, joissa näitä asioita opiskeltiin. Tutkimuksen mukaan oppilaat pitivät fraktaaligeometrian oppitunneista. Varsinkin piirtämistehtävät ja tietokoneella tehdyt tehtävät olivat oppilaiden mielestä mielenkiintoisia. Osa laskutehtävistä oli vaikeita ja olisi vaatinut pidemmän opiskeluajan. Suurin osa oppilaista piti näitäkin tehtäviä mielenkiintoisina niiden haastavuuden vuoksi. Tutkimuksen lopputuloksena voidaan perustellusti harkita fraktaaligeometrian kurssin sisällyttämistä seuraavaan yläkoulun matematiikan opetussuunnitelmaan.

SISÄLLYSLUETTELO

1. Tutkimuksen lähtökohdat

Kiinnostuin fraktaaligeometriasta 1990-luvun lopulla luettuani siitä kertovia artikkeleita tieteellisistä lehdistä. Olin jo tuolloin opiskellut matematiikkaa yliopistossa. Fraktaaligeometriaa ei voinut opiskella Tampereen yliopistossa, joten sen matemaattinen perusta jäi osaltani opiskelematta. Olin jo tuolloin työskennellyt yläasteen ja lukion matematiikan opettajana yli 10 vuotta. Huomasin, että fraktaaligeometriaa ei mainittu yläkoulun ja lukion matematiikan opetussuunnitelmissa. Ajattelin, että olisi mielenkiintoista tutkia, sopisiko fraktaaligeometrian kurssi esimerkiksi yläasteen matematiikan opetussuunnitelmaan. Huomasin, että fraktaaligeometrian soveltuvuudesta peruskouluun ei oltu tehty aikaisempia tutkimuksia.

Jo 2000-luvun alussa keskusteltiin peruskoulun matematiikan oppimistuloksista ja kouluviihtyvyydestä. Oppimistulokset olivat olleet Suomessa hyviä, kun niitä oli verrattu kansainvälisiin tuloksiin. Sen sijaan, kun oli mitattu oppilaiden koulussa viihtymistä, niin tulokset olivat kansainvälisessä vertailussa huonoja. Mielestäni fraktaaligeometrian kurssi olisi voinut lisätä oppilaiden mielenkiintoa matematiikkaa kohtaa ja lisätä siten myös koulussa viihtymistä. Opetin tuolloin matematiikan lisäksi myös tietotekniikkaa useille oppilaille, jotka kuuluivat matematiikan ryhmiini. Huomasin, että pystyin yhdistämään tietotekniikkaa matematiikan opiskeluun fraktaalien avulla. Koin tärkeäksi sen, että myös matematiikan opiskelussa voitaisiin hyödyntää tietokoneita.

Tarkoituksena oli, että voisin tehdä tutkimuksesta matematiikan pro gradu -tutkielman Tampereen yliopistoon. Siirryin lukuvuodeksi 2001-2002 matematiikan opettajaksi Klassilliseen kouluun Tampereelle. Syksyllä 2001 Tampereen yliopiston matematiikan professori Lauri Hella hyväksyi esittämäni tutkimussuunnitelman. Tarkoituksena oli tutkia millainen fraktaaligeometrian kurssi olisi sopiva opiskeltavaksi yläasteella. Tutkittavia asioita olivat kurssin laajuus ja sisällöt. Lisäksi tarkoituksena oli tutkia mille luokkatasolle kurssi sopisi parhaiten.

Tutkimukseni laajeni siten, että pidin erilaisia fraktaaligeometrian kursseja Klassillisessa koulussa lukuvuosina 2001-2010 eri luokkatasoille seitsemännestä yhdeksänteen luokkaan asti. Siten pystyin tutkimaan, mikä oli paras mahdollinen ajankohta fraktaaligeometrian kurssin suorittamiseksi.

Kurssin sisällöt muuttuivat hieman vuosien myötä. Oli selvää, ettei 7. luokan oppilailta voinut vaatia samanlaista matemaattista osaamista kuin 9. luokan oppilailta. Fraktaaligeometrian piirtämistehtävät pysyivät kuitenkin suurin piirtein samanlaisina vuosittain. Seitsemännen ja kahdeksannen luokan oppilaat suoriutuivat fraktaaligeometrian piirrostehtävistä miltei yhtä hyvin kuin 9. luokan oppilaat. Huomasin melko nopeasti, että fraktaaligeometrian opiskelussa tarvitaan sellaisia matematiikan peruskäsitteitä, kuten rationaalilukujen laskutoimitukset sekä potenssisäännöt ja geometrian monikulmiot, yhdenmuotoisuus sekä yhtenevyyskuvaukset, joita 7.- ja 8. -luokkalaiset eivät osaa hyvin. Oli siis selvää, että paras ajankohta fraktaaligeometrian opiskelulle oli 9. luokka. Vuonna 2006 tapahtuneessa opetussuunnitelman muutoksessa lisättiin 9. luokan matematiikan kurssiin yksi viikkotunti. Tällöin lukuvuoden viimeisen matematiikan kurssin, tilastomatematiikan, yhteyteen jäi helposti oppitunteja, joita opettaja pystyi soveltamaan itsenäisesti. Pidinkin siis lukuvuosina 2008-2010 fraktaaligeometrian kurssin 9. luokkalaisille matematiikan viimeisenä kurssina. Tässä tutkielmassa esitetyt tuntiselostukset perustuvat näihin oppitunteihin.

Huomasin oppitunteja pitäessä, että fraktaaligeometrian opiskelussa tarvitaan lisäksi sellaisia matemaattisia käsitteitä kuten lukualue, joukko, määrittelyjoukko, arvojoukko, lukujonot, sarjat, funktio, raja-arvo, kasvaminen, väheneminen, jatkuvuus, äärellisyys ja äärettömyys. Kaikkia näitä käsitteitä ei ole yläkoulussa määritelty. Laadin sen vuoksi myös oppitunnit funktion, raja-arvon ja ärettömyyden opiskelemiseksi. Sijoitin nämä oppitunnit opiskeltavaksi juuri ennen varsinaisia fraktaaligeometrian oppitunteja.

Pidin ennen oppituntien aloittamista oppilaille aloitustestin (liite 1). Halusin mitata testissä joitakin perusasioita, joita tarvitaan fraktaaligeometrian opiskelussa. Huomasin myöhemmin, että testi jäi hieman yksipuoliseksi ja sitä olisi pitänyt täydentää. En kuitenkaan muuttanut sitä, koska halusin pitää sen vertailukelpoisena eri vuosiluokkien välillä.

Tutkimuksessa on käytetty yläasteen ja lukion matematiikan nykyisiä opetussuunnitelmia. Yläasteen kirjasarjana on käytetty lähteiden 1-3 kirjoja ja lukion kirjasarjana lähteiden 4-9 kirjoja.

2. Tutkimuksen suoritus ja opetusryhmät

Tutkimus tehtiin pitämällä oppitunteja Tampereen klassillisessa koulussa lukuvuosina 2001 – 2010. Oppitunteja pidettiin kaikille yläasteen luokkatasoille. Lukuvuosina 2001 – 2003 oppitunteja pidettiin neljälle eri 7. luokan matematiikan opetusryhmälle ja lukuvuonna 2003 – 2004 kahdelle eri 9. luokan matematiikan opetusryhmälle. Lukuvuosina 2004 – 2006 oli vuorossa oppitunnit neljälle 8. luokan matematiikan ryhmälle. Lukuvuosina 2006 – 2007 ja 2008-2010 oppitunteja pidettiin kahdelle eri 9. luokan matematiikan opetusryhmälle. Lukuvuonna 2007-2008 oli vuorossa yksi 7. luokan opetusryhmä. Tarkoituksena oli saada kokemuksia mahdollisimman monelta eri luokkatasolta. Valitettavasti lukujärjestys määräsi vuosittain, mitä luokkatasoja tutkimukseen voitiin ottaa mukaan.

Alla olevassa taulukossa 1 on esitetty tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden määrät luokkatason mukaisesti. Taulukosta nähdään myös kuinka suuri oli latinan opiskelijoiden osuus kaikista tutkimukseen osallistuneista oppilaista.

Taulukko 1. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat luokkatasoittain.

luokkataso	yhteensä	latina	ei-latina
7	91	40	51
8	88	44	44
9	104	87	17
yhteensä	283	171	112

Taulukon 1 mukaan oppilasryhmien koot ovat luokkatasoissa 7-9 suunnilleen yhtä suuret. Latinan opiskelijoita oli enemmän kuin muita opiskelijoita.

Alla olevassa taulukossa 2 on esitetty tutkimukseen osallistuneet ryhmät opetuksen ajanjakson mukaan jaoteltuina. Taulukossa on myös esitetty ryhmien oppilasmäärät ja oppilaiden matematiikan arvosanojen keskiarvot. Ryhmän yhteydessä ilmoitettu (L) tarkoittaa latinan opiskelijoiden ryhmää.

Taulukko 2. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat ja matematiikan keskiarvot.

Lukuvuosi	Ryhmä	Oppilaita	Matematiikan keskiarvo
2001-2002	7C (L)	17	8,6
2001-2002	7E	13	7,2
2002-2003	7EF	16	7,6
2002-2003	7G	22	8,0
2003-2004	9A (L)	20	8,4
2003-2004	9E	17	7,4
2004-2005	8B (L)	23	8,7
2004-2005	8E	22	6,9
2005-2006	8A (L)	21	8,4
2005-2006	8D	22	7,0
2006-2007	9B (L)	22	8,4
2007-2008	7C (L)	23	8,1
2008-2009	9B (L)	23	8,1
2009-2010	9A (L)	22	8,2

Taulukosta 2 nähdään, että klassillisen koulun oppiryhmien välillä oli eroja. Se johtuu siitä, että puolet ikäluokasta opiskelee latinaa. Nämä latinan ryhmät oli muodostettu valintakokeiden perusteella. Sen vuoksi oppilaat olivat valikoituneita. Heidän matematiikan arvosanansa olivat keskimäärin parempia kuin muiden ryhmien arvosanat.

Oppilaat tekivät aloitustestin ennen varsinaisia fraktaaligeometrian oppitunteja. Aloitustesti pysyi samana koko tutkimusajan. Oppituntien sisällöt muuttuivat jonkin verran, sillä 7.- ja 8. luokkalaisten kurssit olivat suppeampia kuin 9. luokkalaisten kurssit. Lukuvuodesta 2008 lähtien oppituntien sisällöt eivät muuttuneet. Opiskelumenetelmät muuttuivat koko ajan, sillä etsin parasta mahdollista opiskelutapaa kurssin suorittamiseksi. Oppilaat tekivät fraktaaligeometrian tehtävät annettujen tehtäväpapereiden avulla siten, että opettaja seurasi oppilaiden ja ryhmien toimintaa sekä kirjasi ylös havaintoja oppilaiden ja ryhmien työskentelystä.

3. Taustaa tutkimukselle

3.1 Pohdintaa matematiikan opiskelusta

Historiaa

Suomessa tapahtui suuri muutos yläkouluikäisten oppilaiden matematiikan opiskelussa 1970-luvun alussa. Silloin siirryttiin peruskoulujärjestelmään. Tarkoituksena oli taata jokaiselle oppilaalle samanarvoinen opetus. Ennen peruskouluun siirtymistä oppilaat jakaantuivat yläkouluikäisinä oppikouluissa ja kansalais- tai ammattikouluissa opiskeleviin.

Peruskouluun siirryttäessä myös matematiikan opetusta uudistettiin. Oppikoulussa oli esimerkiksi erikseen algebran ja geometrian oppiaineet, josta jaosta peruskoulussa luovuttiin. Uudessa peruskoulussa opiskeltiin uutena asiana joukko-oppia, jota matematiikassa ei tällä tasolla aikaisemmin opiskeltu. Joukko-opissa käsiteltiin joitakin käsitteitä, jotka jäivät myöhemmistä opetussuunnitelmista pois. Näitä käsitteitä olivat mm. alkio, joukko, osajoukko, unioni, leikkaus, määrittelyjoukko, arvojoukko ja kuvaus. Joukko-opissa oli myös merkintöjä, joita ei enää myöhemmin peruskoulussa opiskeltu. Tällaisia olivat mm. $\cup, \cap, \in, \notin$ ja $\subset$, jotka ovat matematiikan perusteiden määrittelyssä keskeisiä merkintöjä.

Matematiikan opiskelu oli jaettu peruskoulun yläasteella tasokursseihin vuoteen 1985 asti. Ennen vuotta 1985 oli olemassa kolme tasokurssia: lyhyt, keskipitkä ja pitkä kurssi. Pitkä kurssi antoi valmiudet lukion laajan kurssin opiskeluun. Vuonna 1985 tasokurssit poistettiin. Uudessa opetussuunnitelmassa oli lähtökohtana opetusryhmien pienentäminen ja yksilöllisen opetuksen antaminen erilaisille oppilaille. Silloin myös luovuttiin joistakin pitkään kurssiin kuuluvista matematiikan määritelmistä. Tällaisia määritelmiä olivat mm. funktioihin liittyvät määritelmät.

Opetussuunnitelma uudistettiin seuraavan kerran vuonna 1994. Tällöin ei tapahtunut suuria muutoksia opetussisällöissä. Ainoa muutos opiskelussa oli se, että opiskeluryhmien koot suurenivat. Siihen oli ehkä suurimpana syynä lama-aika ja sen myötä tullut kuntien rahapula. Vuonna 1996 opetushallitus käynnisti ns. LUMA-projektin, jonka tavoitteina oli nostaa suomalaisten matematiikan osaaminen kansainväliselle tasolle ja lisätä kiinnostusta matematiikan opiskelua kohtaan. Projektiin kuului mm. opettajien lisäkoulutusta ja opiskelumenetelmien kehittämistä. Vuonna 2003 kehitystyö jatkui ”Matematiikan ja luonnontieteiden kehittämisohjelmana”.

Vuoden 2005 opetussuunnitelman uudistuksen lähtökohtana olivat LUMA-projektin tulokset ja se, että lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden lähtötaso oli keskimäärin liian huono. Silloin lisättiin yläasteen matematiikan opiskeluun 9.luokalle yksi viikkotunti. Tarkoituksena oli, että oppilaat voisivat opiskella perusasioita enemmän kuin aikaisemmin. Uuteen opetussuunnitelmaan ei lisätty uusia opiskeltavia asioita. Tilastomatematiikan kurssista tuli laajempi kuin aikaisemmassa opetussuunnitelmassa.

Oppilaiden osaamisesta

Suomalaiset 9.luokkalaiset ovat osallistuneet vuosina 2000, 2003, 2006 ja 2009 PISA-tutkimuksiin, joissa on mitattu myös oppilaiden matemaattista osaamista. PISA-tutkimuksessa arvioinnin kohteena eivät ole olleet opetussuunnitelman mukaiset tiedot vaan tarkoituksena on ollut mitata oppilaiden ajatusten erittelyä, perustelua ja viestimistä sekä matemaattisten ongelmien asettamista, muotoilua ja ratkomista eri aihealueilla ja erilaisissa arkielämän tilanteissa. Lisäksi on haluttu korostaa matemaattisen tiedon soveltamista yhteyksissä, jotka edellyttävät asioiden ymmärtämistä pohtimista ja perustelemista. Tällöin tarvitaan matematiikan perustietoja ja -taitoja, kuten terminologian tuntemista, faktatietoutta sekä laskutoimitusten ja ratkaisumenetelmien käyttötaitoja.

Tulokset ovat olleet hyviä, sillä suomalaiset oppilaat sijoittuivat matematiikan osaamisessa vuonna 2000 neljänneksi, vuosina 2003 ja 2006 toiseksi sekä vuonna 2009 kuudenneksi. Pisteet ovat olleet 536 (v. 2000), 544 (v. 2003), 548 (v. 2006) ja 541 (v. 2009). Tulosten mukaan suomalaisten oppilaiden erot osaamisessa ovat pienempiä kuin muissa tutkimukseen osallistuneissa maissa. Myös koulukohtaiset erot ja sukupuolten väliset erot ovat pienempiä kuin muissa maissa. Toisaalta huippujen prosentuaalinen lukumäärä ei ole Suomessa ollut yhtä suuri kuin joissakin muissa maissa.

Vastoin PISA-tutkimuksen tuloksia, on mielestäni tämän tutkimuksen välisenä ajanjaksona (v. 2001-2010) tapahtunut oppilaiden osaamisessa jonkin verran muutoksia. Nämä muutokset ovat olleet nähtävissä 7. luokan alkaessa. Mielipiteeni perustuu mm. lähtötasotesteihin, joita olen pitänyt alakoulusta tulleille oppilaille heti 7. luokan alkaessa. Kaikki oppilaat eivät osaa nykyisin esimerkiksi kertotaulua ja heillä on lukujen suuruuskäsityksissä ja päässälaskutaidoissa puutteita keskimäärin enemmän kuin aikaisemmin. Myös spatiaalisissa testeissä heidän hahmottamiskykynsä on ollut viime vuosina heikompi kuin aikaisempina vuosina. Tuloksiin on ehkä vaikuttanut useiden erityiskoulujen sulkeminen, jolloin yläasteelle on integroitu viime vuosina paljon oppilaita, joilla on diagnosoitu erilaisia oppimisongelmia.

Mielestäni yläkoulun matematiikan kursseissa ei perustella aina annettuja laskukaavoja eikä opiskella peruskäsitteitä matemaattisesti. Esimerkiksi Pythagoran lausetta ei perustella matemaattisesti ja funktion määrittely on puutteellinen. Monesti näitä peruskäsitteitä ei edes mainita lainkaan. Esimerkiksi käsitteitä äärettömyys, jatkuvuus ja joukko ei mainita ollenkaan. Minulla on siis sellainen käsitys yläkoulun matematiikan opiskelusta, että oppilaiden matemaattinen osaaminen jää jonkin verran puutteelliseksi, koska perusasioiden ymmärtämistä ei yläkoulussa opiskella tarpeeksi.

3.2 Yläasteen matematiikan opetuksesta

Yleistä

Tutkimuksessa selvitettiin aluksi, miten seuraavat matemaattiset käsitteet määritellään yläkoulun matematiikan opiskelussa: lukualueet, rationaalilukujen laskutoimitukset, geometrian peruskäsitteet, lukujonot ja sarjat, funktio, äärettömyys, raja-arvo sekä jatkuvuus. Yläkoulun määritelmiä verrattiin lisäksi lukion pitkän matematiikan määritelmiin.

Lukualueet

Yläkoulussa lukualueet opiskellaan 8.luokalla. Luonnolliset luvut esitellään merkinnällä $\mathbb{N} = \{0,1,2,,\ldots\}$ ja kokonaisluvut merkinnällä $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. Rationaaliluvuiksi määritellään kaikki kokonaisluvut ja murtoluvut. Irrationaaliluvuiksi määritellään päättymättömät jaksottomat desimaaliluvut. Reaaliluvuiksi määritellään lukujoukko, joka sisältää rationaaliluvut ja irrationaaliluvut. Yläasteella ei mainita kompleksilukuja (2, s.62).

Lukion pitkän matematiikan oppikirjassa määritellään, että luonnolliset luvut ovat lukumäärien ilmaisemiseen käytettäviä lukuja $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$(4, s.9). Kokonaisluvuiksi määritellään luvut $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ (4, s.12). Rationaaliluvuiksi määritellään kaikki luvut, jotka voidaan merkitä murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä osoittaja m ja nimittäjä n ($\neq 0$) ovat kokonaislukuja (4, s.16). Lisäksi määritellään, että irrationaalilukuja ei voida esittää murtolukumuodossa. Reaaliluvut määritellään lukualueeksi, jotka sisältävät rationaaliluvut ja irrationaaliluvut (5, s.11). Kompleksiluvut määritellään kompleksitasossa vektorin avulla (5, s.16).

Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut määritellään siis yläkoulussa ja lukiossa samalla tavalla. Rationaali- ja irrationaaliluvut määritellään lukiossa hieman tarkemmin kuin yläkoulussa. Kompleksilukuja ei yläasteella määritellä. Kompleksilukuihin kuuluva luku $\sqrt{-1}$ esiintyy yläkoulussa toisen asteen yhtälön $x^2 = 1$ ratkaisussa. Tällöin todetaan, että yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisua.

Rationaalilukujen laskutoimitukset

Rationaalilukujen laskutoimituksia opiskellaan yläkoulussa ensimmäisen kerran 7. luokan syksyllä. Tällöin opiskellaan yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut (1, s.40-45). Kahdeksannen luokan syksyllä opiskellaan rationaalilukujen potenssit (2, s.40). Yhdeksännen luokan keväällä kerrataan edellä mainitut asiat (3, s.148 – 151).

Geometria

Seitsemännellä luokalla opiskellaan kolmiot, nelikulmiot ja säännölliset monikulmiot. Monikulmio määritellään tällöin alueeksi, jota rajoittaa itseään leikkaamaton murtoviiva (1, s.88). Yleisesti todetaan, että monikulmion nimitys tulee monikulmion kulmien lukumäärän mukaan.

Kolmioista opiskellaan terävä-, tylppä- ja suorakulmaiset kolmiot sekä tasakylkiset ja tasasivuiset kolmiot. Määritelmien mukaan teräväkulmaisen kolmion jokainen kulma on terävä, tylppäkulmaisen kolmion yksi kulma on tylppä ja suorakulmaisen kolmion yksi kulma on suora (1, s.90). Kolmio määritellään tasakylkiseksi, kun siinä on kaksi yhtä pitkää sivua ja tasasivuiseksi, kun siinä ovat kaikki sivut yhtä pitkät (1, s.92).

Nelikulmio määritellään monikulmioksi, jossa on neljä kulmaa ja neljä sivua. Puolisuunnikas määritellään nelikulmioksi, jossa on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua. Suunnikas määritellään nelikulmioksi, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Suorakulmio määritellään suunnikkaaksi, jonka kulmat ovat suorat. Neliö määritellään suorakulmioksi, jonka sivut ovat yhtä pitkät ja neljäkäs määritellään suunnikkaaksi, jonka sivut ovat yhtä pitkät (1, s.96). Epäsäännöllinen nelikulmio ei ole mikään edellä mainituista nelikulmioista. Säännöllinen monikulmio määritellään monikulmioksi, jossa kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat yhtä suuret (1, s.100).

Seitsemännen luokan kurssissa opiskellaan vielä erilaisten monikulmioiden piirin laskemista. Monikulmion piiriä ei määritellä. Pinta-aloja lasketaan erilaisista kolmioista, nelikulmioista ja säännöllisistä monikulmioista. Laskukaavat annetaan kolmion, suorakulmion, suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-alan laskemiseksi.

Yhtenevyyskuvauksista opiskellaan peilaus ja symmetrisyys sekä pisteen, että suoran suhteen. Määritelmän mukaan kaksi pistettä ovat toistensa peilikuvia suoran suhteen, jos ne ovat suoran samalla normaalilla yhtä kaukana suorasta. Tällaista suoraa sanotaan peilaussuoraksi. Kuviot määritellään toistensa peilikuviksi suoran suhteen, jos kuvion jokaisella pisteellä on peilikuva toisessa kuviossa (1, s.104). Määritelmän mukaan kaksi pistettä ovat toistensa peilipisteitä tietyn pisteen O suhteen, jos ne ovat tämän pisteen kautta kulkevalla suoralla samalla etäisyydellä pisteestä O. Tällöin pistettä O sanotaan peilauskeskukseksi. Kuviot ovat toistensa peilikuvia pisteen suhteen, jos kuvion jokaisella pisteellä on peilipiste toisessa kuviossa. Tällöin pisteen suhteen peilatut kuviot ovat yhtenevät (1, s.106).

Määritelmän mukaan kuvio on symmetrinen suoran suhteen, jos kuvio on itsensä peilikuva. Tällöin suora on kuvion symmetria-akseli (1, s.104). Symmetrisyys pisteen O suhteen määritellään siten, että kuvio on symmetrinen pisteen O suhteen, jos kuvio on itsensä peilikuva. Tällöin piste O on kuvion symmetriakeskus (1, s.106).

Seitsemännen luokan geometriassa opiskellaan lopuksi pisteiden ja kuvioiden siirto ja kierto koordinaatistossa. Kierto määritellään siten, että kuvion jokainen piste kiertyy yhtä suuren kulman kiinteän pisteen, kiertokeskuksen, ympäri etäisyytensä säilyttäen. (1, s.109). Siirtoa ei määritellä.

Kahdeksannen luokan geometriassa opiskellaan kuvioiden yhdenmuotoisuus. Määritelmän mukaan yhdenmuotoisilla kuvioilla vastinjanojen pituuksien suhteet ovat samat ja vastinkulmat yhtä suuret. Yhtenevyys määritellään siten, että vastinjanojen suhde on yksi (2, s.126). Erikseen esitetään kolmioiden yhdenmuotoisuuden määritelmä. Sen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos kolmioiden sivujen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret ja jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret kuin toisen kolmion kaksi kulmaa (2, s.132).

Vertailtaessa lukion kursseihin, yhdenmuotoisiksi määritellään kuviot, jotka saadaan toisistaan kiertämällä, suurentamalla, pienentämällä tai peilaamalla (6, s.18). Yläasteella yhdenmuotoisuuden määritelmässä on siis käytetty mittakaavan laskemisen kaavaa.

Lukujonot ja sarjat

Lukujonoja opiskellaan yläkoulussa ensimmäisen kerran seitsemännen luokan keväällä. Ennen lukujonoja opiskellaan rationaalilukujen peruslaskutoimitukset sekä geometrian perusteet. Kokonaislukujen ja rationaalilukujen laskutoimituksista on opiskeltu yhteen- ja vähennyslasku, kertolasku, jakolasku sekä potenssilaskut. Geometriassa on opiskeltu tasogeometrian osa-alueista kulmat, suorat, ympyrä, monikulmiot ja koordinaatisto. Lisäksi on opiskeltu yhtenevyyskuvauksista peilaus ja symmetria.

Seitsemännen luokan kurssissa lukujono määritellään järjestykseen asetettujen lukujen luetteloksi, jossa lukujonon luvut ovat lukujonon jäseniä (1, s.126). Vertailun vuoksi, lukion pitkässä kurssissa lukujono määritellään funktioksi, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja (7, s. 85). Määrittelyissä on siis se ero, että lukiossa lukujonot määritellään funktion avulla. Funktio opiskellaan seitsemännellä luokalla heti seuraavaksi lukujonojen kurssin jälkeen, joten funktiota ei käytetä lukujonojen määrittelyssä.

Aritmeettinen lukujono määritellään seitsemännellä luokalla siten, että aritmeettisessa lukujonossa seuraava jäsen saadaan lisäämällä lukujonon edelliseen lukuun aina sama luku (1, s.130). Lukion pitkän matematiikan kurssissa aritmeettinen jono määritellään lukujonoksi, jonka jäsenen ja edellisen jäsenen erotus on vakio (7, s.95). Jonon aritmeettisuusehdon mukaisesti siis jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on aritmeettinen jono, jos ja vain jos on olemassa luku d siten, että $a_{n+1} - a_n = d$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (7, s.95).

Geometrinen lukujono määritellään seitsemännen luokan kurssissa siten, että seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen aina samalla luvulla (1, s.132). Lukion pitkän matematiikan kurssissa geometrinen jono määritellään lukujonoksi, jonka jokaisen jäsenen suhde edelliseen jonon jäseneen on vakio (7, s.102). Jonon geometrisuusehdon mukaisesti siis jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen, jos ja vain jos on olemassa luku q siten, että $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (7, s.102).

Lukion määritelmät sekä aritmeettiselle, että geometriselle jonolle ovat siis samat kuin yläasteella. Aritmeettisuusehdossa ja geometrisuusehdossa on kuitenkin käytetty sanontaa ”jos ja vain jos” sekä merkintää $n \in \mathbb{N}$, joita yläasteella ei ole opeteltu. Lisäksi aritmeettisuusehtoa ja geometrisuusehtoa ei ole yläasteella määritelty.

Lukujonoja ei yläasteella opiskella enää seitsemännen luokan jälkeen. Sarjojen käsitteitä ja määritelmiä ei yläasteen matematiikan kursseissa opiskella.

Funktio

Funktiota ei 7. luokalla varsinaisesti määritellä. Se esitetään koneena, jonne voidaan syöttää lukuarvoja. Kone tekee sen jälkeen näille syötteille tietyn säännön mukaiset laskutoimitukset ja tulostaa tulosteen (1, s.134). Yhdeksännen luokan kurssissa funktio määritellään säännöksi, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo $f(x)$ (3, s.62).

Lukiossa funktio määritellään säännöksi, joka ilmaisee kuinka jokaisesta sen määrittelyjoukon luvusta saadaan toinen luku, funktion arvo. Säännön tulee olla sellainen, että se määrää funktion arvon yksikäsitteisesti (5, s.29).

Yläasteella ei siis mainita määrittely- ja arvojoukkojen käsitteitä vaan puhutaan syötteistä ja tulosteista. Yläasteella ei myöskään mainita yksikäsitteisyyttä vaan käytetään sanontaa ”vastaa täsmälleen yksi arvo”.

Kasvaminen ja väheneminen

Yläkoulussa ei mainita käsitteitä kasvaminen ja väheneminen. Lineaarisen funktion kuvaajien yhteydessä mainitaan, että kuvaaja voi olla nouseva tai laskeva (3, s.76).

Lukiossa funktio määritellään kasvavaksi lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvojen suuretessa myös funktion arvot suurenevat tai ovat vähintään yhtä suuret. Vastaavasti funktio on vähenevä, jos funktion arvot pienenevät tai ovat yhtä suuret (8, s.74). Lukujono määritellään aidosti kasvavaksi, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä suurempi ja aidosti väheneväksi, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä pienempi. Jono on aidosti monotoninen, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä (7, s.89).

Äärettömyys ja äärellisyys

Yläasteella ei mainita käsitteitä äärettömyys ja äärellisyys. Lukujonoista mainitaan, että ne voivat olla päättyviä tai päättymättömiä. Päättymätön lukujono merkitään kolmella pisteellä (1, s.126).
Lukiossa joukko määritellään äärettömäksi, jos sillä on aito osa-joukko, jossa on yhtä monta alkiota kuin koko joukossa. Joukko on äärellinen, jos se ei ole ääretön (7, s.141).

Raja-arvo

Yläkoulussa ei mainita käsitettä raja-arvo. Lukiossa määritellään funktion f raja-arvo siten, että funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b, jos muuttujan arvojen lähestyessä lukua a kummalta puolen tahansa, funktion f arvot lähestyvät lukua b. Lähestymisen tulee olla sellaista, että tulemalla tarpeeksi lähelle lukua a funktion f arvot saadaan niin lähelle lukua b kuin suinkin halutaan (8, s.22).

Jatkuvuus

Yläkoulussa ei mainita jatkuvuuden käsitettä. Lukiossa funktion jatkuvuus määritellään siten, että funktio f on jatkuva kohdassa a, jos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Tässä a on jokin luku funktion f määrittelyjoukossa (8, s.31).

3.3 Aloitustesti

Lähtökohdat aloitustestin laatimiseksi

PISA-tutkimuksen yhdeksi osa-alueeksi mainittiin matemaattisen terminologian osaaminen. Aloitustestin yksi tarkoitus olikin juuri kartoittaa tätä osaamista. Esimerkiksi käsitteitä äärettömyys, jatkuvuus, kasvaminen ja raja-arvo ei mainita yläkoulun kursseissa. Tarkoituksena oli tutkia aloitustestin avulla tunnistavatko oppilaat näitä käsitteitä intuitiivisesti.

Aloitustestin tehtävät

Aloitustestin tehtävät ovat liitteessä 1. Tehtävien tarkoituksena oli selvittää kuinka hyvin oppilaat pystyvät vastaamaan tehtäviin, joita koulussa ei ole opiskeltu. Ainoastaan osion A tehtävät olivat sellaisia, jotka kuuluivat yläasteen kurssiin.

Aloitustestin osiossa A tutkittiin, kuinka hyvin oppilaat pystyivät jatkamaan aritmeettista tai geometrista jonoa. Seitsemännen luokan kurssissa on vastaavan tasoisia tehtäviä. Osiossa B tutkittiin, kuinka hyvin oppilaat pystyivät päättelemään aritmeettisen tai geometrisen jonon yleisen säännön. Tällaisia tehtäviä ei yläasteen kurssista yleensä löydy. Tutkimuksessa käytetystä oppikirjasta löytyi tehtävä, jossa piti löytää lukujonon (2, 4, 6, 8, …) sadas jäsen (7, s.131). Tehtävä on suhteellisen helppo verrattuna aloitustestin tehtäviin.

Aloitustestin osion C tehtävissä oli tarkoituksena selvittää, osaavatko oppilaat kirjoittaa aritmeettisen tai geometrisen sarjan summan lausekkeen. Tällaisia summia ei opiskella yläasteella. Oli siis oletettavaa, että osion tehtävät tuottivat oppilaille vaikeuksia.

Osion D tehtävissä selvitettiin kuinka hyvin oppilaat ymmärtävät äärettömän ja äärellisen joukon käsitteet. Samassa osiossa selvitettiin myös kuinka hyvin oppilaat tuntevat lukualueita. Lukualueet on yläkoulussa määritelty, mutta äärettömyyttä ei ole määritelty. Osiossa pyydettiin myös perustelemaan vastaus, jotta nähtiin, oliko vastaus järkevä. Oli oletettavaa, että oppilailla oli jonkinlainen käsitys äärettömyydestä, sillä se kuuluu yleiseen sanavarastoon.

Yläkoulussa ei opeteta raja-arvon käsitettä. Aloitustestin osiossa E oli tehtäviä, joissa oppilaiden oli etsittävä luku, jota kohti lukujono lähestyy. Tarkoituksena oli selvittää, pystyvätkö oppilaat intuitiivisesti päättelemään, mikä on jonon raja-arvo.

Osiossa F testattiin, kuinka hyvin oppilaat ymmärsivät käsitteet kasvaminen ja väheneminen, lukujonojen yhteydessä. Kasvamista ja vähenemistä ei mainita yläkoulun kursseissa lukujonojen, eikä myöskään funktioiden yhteydessä. Nämä termit ovat kuitenkin käytössä arkikielessä, joten oli oletettavaa, että oppilaat osasivat yhdistää ne matemaattisiin tehtäviin.

Funktio opetetaan yläkoulussa ns. funktiokoneena. Osion G tehtävissä oli tarkoitus selvittää ymmärtävätkö oppilaat mitä funktio tarkoittaa.

Aloitustestin tulokset

Liitteen 2 sivun 1 taulukossa 1 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi A-osion tehtäviin oikein. Tulokset on ryhmitetty kronologisesti ryhmien mukaisesti. Tehtävät 1 ja 2 on osattu hyvin, sillä huonoin tulos oli 55% ja paras tulos 100%. Muissa tehtävissä hajonta oli hieman suurempi. Vaikeimmat tehtävät olivat tehtävät 5 ja 7, joissa huonoimmat tulokset olivat 23% ja 27%. Parhaat tulokset olivat näissä tehtävissä 91% ja 83%. Taulukossa 2 on esitetty eri luokkatasojen painotetut prosenttijakaumat. Seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaiset osasivat tehtävät keskimäärin yhtä hyvin. Parasta tehtävien osaaminen oli 9.luokkalaisilla. Taulukossa 3 on esitetty painotetut prosenttiosuudet latinan opiskelijoihin (lat) ja muihin opiskelijoihin (eilat) jaoteltuina. Latinan opiskelijat osasivat osion A tehtävät selvästi paremmin kuin muut opiskelijat. Tehtävissä 5, 6 ja 7 ero oli huomattava.

Liitteen 2 sivun 2 taulukossa 4 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi B-osion tehtäviin oikein. Tehtävät 3 ja 4 osattiin huonosti, ainoastaan neljästä ryhmästä löytyi oppilaita, jotka osasivat nämä tehtävät. Hajonta tehtävien 1 ja 2 osaamisessa oli suuri, sillä osaaminen vaihteli välillä 0% - 60%. Taulukossa 5 on esitetty eri luokkatasojen painotetut prosenttijakaumat. Yhdeksäsluokkalaiset osasivat tehtävät paremmin kuin kahdeksasluokkalaiset. Heikoimmin tehtävät osasivat 7. luokkalaiset. Taulukossa 6 on esitetty painotetut prosenttiosuudet latinan opiskelijoihin (lat) ja muihin opiskelijoihin (eilat) jaoteltuina. Latinan opiskelijat osasivat tehtävät selvästi paremmin kuin muut opiskelijat.

Liitteen 2 sivun 3 taulukossa 7 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi C-osion tehtäviin oikein. Taulukosta nähdään, että osion C tehtävät olivat vaikeita. Tehtäviä 2 ja 3 ei osannut kukaan. Taulukossa 8 on esitetty eri luokkatasojen painotetut prosenttijakaumat. Vain 9.luokkalaiset osasivat kohtuullisen hyvin tehtävän 1. Taulukossa 9 on esitetty painotetut prosenttiosuudet latinan opiskelijoihin (lat) ja muihin opiskelijoihin (eilat) jaoteltuina. Tehtävän 1 osanneista oli suurin osa latinan opiskelijoita.

Liitteen 2 sivun 3 taulukossa 10 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi D-osion tehtäviin oikein. Tehtävät 2, 4 ja 6 on osattu heikommin kuin muut tehtävät. Liitteen 2 sivun 4 taulukossa 11 on esitetty eri luokkatasojen painotetut prosenttijakaumat. Yhdeksäsluokkalaiset osasivat tehtävät paremmin kuin kahdeksasluokkalaiset. Heikoimmin tehtävät osasivat 7.luokkalaiset. Taulukossa 12 on esitetty oikein vastanneiden painotetut prosenttiosuudet latinan opiskelijoihin (lat) ja muihin opiskelijoihin (eilat) jaoteltuina. Yhdeksäsluokkalaiset latinan opiskelijat osasivat tehtävät selvästi paremmin kuin muut opiskelijat.

Liitteen 2 sivun 4 taulukossa 13 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi E-osion tehtäviin oikein. Tehtävät oli osattu melko hyvin, sillä suurimman osan tehtävistä oli osannut yli puolet oppilaista. Liitteen 2 sivun 5 taulukossa 14 on esitetty eri luokkatasojen painotetut prosenttijakaumat. Luokkatasojen välillä ei ole huomattavia eroja. Taulukossa 15 on esitetty oikein vastanneiden painotetut prosenttiosuudet latinan opiskelijoihin (lat) ja muihin opiskelijoihin (eilat) jaoteltuina. Latinan opiskelijat osasivat tehtävät 1, 6, 9 ja 10 selvästi paremmin kuin muut opiskelijat.

Liitteen 2 sivun 5 taulukossa 16 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi F-osion tehtäviin oikein. Tehtävät oli osattu hyvin, sillä ainoastaan tehtävissä 2 ja 3 oli joidenkin ryhmien osaaminen alle 50 %. Liitteen 2 sivun 6 taulukossa 17 on esitetty eri luokkatasojen painotetut prosenttijakaumat. Seitsemäsluokkalaiset osasivat tehtävät hieman huonommin kuin muut. Taulukossa 18 on esitetty oikein vastanneiden painotetut prosenttiosuudet latinan opiskelijoihin (lat) ja muihin opiskelijoihin (eilat) jaoteltuina. Latinan opiskelijat osasivat tehtävät 2 ja 3 selvästi paremmin kuin muut opiskelijat.

Liitteen 2 sivun 6 taulukossa 19 on esitetty kuinka monta prosenttia oppilaista vastasi G-osion tehtäviin oikein. Vain 9.luokkalaiset osasivat vastata osion G tehtäviin.

Johtopäätöksiä aloitustestistä

Aloitustestin tuloksiin vaikutti selvästi oppilaiden matematiikan arvosana. Latinan opiskelijoilla nämä arvosanat olivat selvästi paremmat kuin muilla opiskelijoilla. Sen vuoksi he osasivat myös tehtävät paremmin kuin muut opiskelijat. Yhdeksäsluokkalaiset osasivat tehtävät paremmin kuin kahdeksasluokkalaiset ja kahdeksasluokkalaiset osasivat tehtävät hieman paremmin kuin seitsemäsluokkalaiset. Tulos ei ollut yllättävä, sillä oletettavasti ylemmillä luokilla osataan matematiikkaa paremmin kuin alemmilla luokilla.

Osion A tulokset osoittavat, että tehtävän 7 tyyppiset päättelyt tuottivat oppilaille vaikeuksia. Tehtävässä muuttuivat sekä osoittaja että nimittäjä. Osion B mukaan oppilaat eivät osanneet päätellä geometrisen lukujonon yleistä sääntöä. Harva osasi myös aritmeettisen jonon yleisen säännön. Osion C tulokset osoittivat, että yksikään oppilas ei osannut muodostaa geometrisen jonon summan lauseketta ja vain harva osasi muodostaa aritmeettisen jonon summan lausekkeen. Osion D tulokset osoittivat, että osa latinan opiskelijoista pystyi päättelemään intuitiivisesti jono raja-arvon, jos jono muodostui kokonaisluvuista. Harva pystyi päättelemään raja-arvon, kun jono oli muodostunut murtoluvuista. Osioiden E ja F tulokset osoittivat, että oppilaat pystyivät melko hyvin päättelemään käsitteiden ääretön, äärellinen, kasvava ja vähenevä merkityksen. Osion G tulosten mukaan ainoastaan 9.luokkalaiset pystyivät erottamaan perustellen funktion yhtälön. Tulokseen vaikutti se tosiasia, että suoran yhtälö käsitellään vasta 9.luokalla. Polynomifunktio opiskellaan 8. luokalla. Siitä huolimatta useat 8. luokkalaiset eivät pystyneet perustelemaan polynomia funktioksi.

Aloitustestin perusteella voidaan päätellä, että jonojen yleisen säännön ja jonojen summien lausekkeet osattiin huonosti. Myös raja-arvon ja funktion käsitettä moni ei ymmärtänyt. Monelle jäi myös äärettömyyden käsite epäselväksi. Käytin näitä aloitustestin tuloksia hyväksi, kun suunnittelin oppitunteja fraktaaligeometrian opiskelemiseksi.

4. Perusteita oppituntien laatimiseksi

4.1. Oppimiskäsityksistä

Suomessa matematiikan opetuksen lähtökohtana oli vuosia se periaate, että matematiikka tieteenä ja opiskeltavana oppiaineena oli joukko tosiasioita. Opettajien tehtävänä oli jakaa tämä tosiasioiden kokoelma oppilaille ylhäältä käsin annettuna tietona. Peruskoulun toteutuessa 1970-luvulla Suomessa matemaatikkojen lisäksi myös kasvatustieteilijät osallistuivat aktiivisesti matematiikan opiskelua koskevaan pedagogiseen keskusteluun. Esimerkiksi Tampereen yliopiston professorin Jarkko Leinon mukaan tämän perinteisen käsityksen mukaan matematiikka oli ollut hierarkkinen tietorakennelma, jossa tieto oli ollut objektiivista, virheetöntä ja universaalia. Tällöin opetuksen päätavoitteena oli ollut tietorakennelman opettelu (10, s.27). Leinon mukaan opetussuunnitelmien sisältöluettelot sanelivat tällöin opetuksen suunnan (10, s.28).

Suomessa on yläasteen matematiikan opiskelussa noudatettu koko maata kattavia opetussuunnitelmia 1970-luvulta lähtien. Opetussuunnitelmissa on yritetty huomioida erilaisia oppimisnäkemyksiä, joita kasvatustieteellinen tutkimus on tuonut esille. Näitä ovat esimerkiksi kokemuksellinen, behavioristinen, humanistinen ja kognitiivinen oppiminen (11, s. 52).

Kokemuksellista oppimista tapahtuu ihmisen kokemuksien kautta. Tällöin oppiminen perustuu oppilaan kokemuksiin ja kykyyn arvioida omia kokemuksiaan. Kokemuksellista oppimista pidetään myötäsyntyisenä, sillä jo pienet lapset oppivat kokemuksellisesti. Koulussa kokemuksellisen oppimisen lähtökohtana on oppilaan tarpeet ja motivaatio, opettaja toimii oppimisen tukijana. Silloin vastuu oppimisesta jää oppilaalle itselleen.

Behavioristinen oppimiskäsitys on perustunut kausaaliseen syy-seuraussuhteeseen. Oppimista on voitu selittää kuten mitä tahansa luonnontieteellistä ilmiötä. Pyrkimyksenä on ollut silloin oppiaineksen opettaminen ja oppimisen vahvistamisena ovat olleet koetulokset. Tällöin henkilökohtaista palautetta ei ole annettu. Palautteena ovat toimineet oppilaan saamat arvosanat.

Humanistisessa oppimiskäsityksessä tärkeätä on ollut vuorovaikutuksellisuus opettajan ja oppilaan välillä. Opettajan roolina ei ole ollut olla arvosteleva auktoriteetti vaan oppimisen ohjaaja. Tarkoituksena on ollut, että Maslowin tarvehierakian perusteella on voitu motivoida oppilaita joko itseohjautuvasti tai ryhmätyöskentelyllä. Oppilaiden arvostelu on tällöinkin perustunut arvosanoihin.

Kognitiivisista oppimiskäsityksistä konstruktivismi on ollut oppimiskäsitys, jota on opiskeltu viime aikoina monissa suomalaisissa yliopistoissa. Konstruktivismissa lähtökohtana on ollut se, että oppiminen on tapahtunut aikaisemman tiedon ja opitun kontekstissa. Tietoa ei ole välttämättä ollut ennen oppimista olemassa. Voi olla, että on ollut käsityksiä opiskeltavasta asiasta. Nämä käsitykset ovat voineet myös olla ristiiriidassa uuden tilanteen kanssa. Opettajan tehtävänä on ollut järjestää oppimistilanne siten, että siinä tapahtuu ristiriita oppilaan ennakoidun ajattelutavan välillä. Tällöin tapahtuu oppilaan sisältä päin ohjautuva oppiminen. Kun tämän oppimisen pystyy linkittämään esimerkiksi oppilaan jokapäiväiseen elämään niin oppiminen voi kumuloitua aikaisemman tiedon kanssa. Tällöin ei tarvita välttämättä arvosanoja vaan oppimista voidaan arvioida oppilaan aikaisemman edistymisen perusteella.

Nykyisten opetussuunnitelmien perustana olevan sosiaalisen konstruktionismin mukaan tieto ja sen rakenteet sekä todellisuus muodostuvat kielellisessä ja sosiaalisessa vuorovaikutuksessa. Tällöin tietoa pidetään itsestään selvyytenä. Ei huomata välttämättä sitä tosiasiaa, että käsitys todellisuudesta on muodostunut ajan myötä tässä vuorovaikutuksessa. Sosiaalisessa konstruktionismissa kyseenalaistetaan nämä valmiit ja olemassa olevat totuuden ja tiedon rakenteet.

4.2 Opiskelumenetelmistä

Perinteisissä opiskelumenetelmissä opiskelu tapahtuu opettajajohtoisesti. Opettaja esittää ensin opiskeltavan asian teoreettisen perustan, joka annetaan oppilaille valmiina ratkaisumallina. Sen jälkeen esitetään teoriaan liittyviä esimerkkejä, jotka annetaan myös valmiiksi ratkaistuna ongelmina. Lopuksi oppilaat harjoittelevat asiaan liittyviä tehtäviä, joiden ratkaisuissa opettaja voi auttaa. Perinteiset opiskelumenetelmät edustavat lähinnä behavioristista oppimiskäsitystä.

Yhteistoiminnallisessa oppimisessa opiskellaan noin 2-5 oppilaan heterogeenisissa pienryhmissä. Opettajan tehtävänä on laatia selkeät säännöt ja tehtävät, jotta ryhmässä toimiminen onnistuu. Tarkoituksena on se, että ryhmät toimivat itsenäisesti, opettajan tehtävänä on laatia tehtävät ja seurata opiskeluprosessia. Tällöin ryhmässä toimiminen voi vahvistaa jokaisen ryhmän jäsenen oppimista. Yhteistoiminnallinen opiskelu edustaa kognitiivista oppimiskäsitystä.

Fraktaaligeometriaa ei ole opiskeltu aikaisemmin yläasteella. Sen vuoksi ei ole olemassa valmiita tehtäviä, joita oppilaille voisi esittää. Tehtäviä laadittaessa yksi lähtökohta oli se, että tehtävät esitetään oppilaille ongelmina, joita ratkaistaan joko yksin tai yhteistoiminnallisesti. Ongelmat voidaan esittää esimerkiksi interpolaatio-ongelmina, analyysi-synteesi –ongelmina tai dialektisina ongelmina (12,s. 38-41).

Interpolaatio-ongelmissa tunnetaan sekä lähtö- että lopputilanne. Oppilaiden tehtävänä on löytää säännönmukainen yhteys alku- ja lopputilojen välille. Matemaattisessa ongelmassa se löytyy, kun käytetään tunnettuja matemaattisia menetelmiä. Opettajan tehtävänä on laatia tehtävät siten, että oppilaat löytävät yhteyden alku- ja lopputilojen välille. Interpolaatio-ongelma ei sovi kovin hyvin matemaattiseen ongelmanratkaisuun, sillä matematiikan tehtävissä ei ole luonnollista antaa etukäteen lopputilannetta.

Analyysi-synteesi –ongelman ratkaisemiseen tarvittavien operaatioiden joukko ei ole välttämättä oppilaiden tiedossa. Tehtävät on laadittava siten, että ratkaisuun käytettävät operaatiot eivät käy selville ongelmanasettelusta. Oppilaiden tehtävänä on löytää ratkaisua varten oikeat menetelmät ja järjestää operaatiot sopiviksi ratkaisuaskeleiksi käytettävissä olevien tietojen analyysin ja synteesin avulla. Näissä tehtävissä lopputilaa ei tarvitse antaa tehtävässä. Sen vuoksi ne soveltuvat hyvin matemaattisiin ongelmatehtäviin.

Dialektisissa ongelmissa ei ole annettu lopputilannetta. Myös alkutilanne voi olla epämääräinen. Lopputilanne syntyy ongelman ratkaisuprosessin aikana oppilaan tekemänä. Ongelmanasettelu voi olla epätarkka ja oppilas voi käyttää ratkaisuissa omia subjektiivisia näkökulmia. Näitä näkökulmia ei voida arvioida totuusarvoilla, vaan opettaja voi antaa oppilaille parannusehdotelmia. Matemaattisissa ongelmissa voidaan käyttää hyväksi dialektisen ongelmanasettelun vapaata muotoilua. Tällöin ongelma ei tunnu niin sidotulta kuin esimerkiksi analyysi-synteesi –ongelmissa. Vapaampi muotoilu voi tehdä ongelmasta myös mielenkiintoisemman kuin analyysi-synteesi –ongelmissa. Tällainen ongelmanratkaisu ei ole käyttökelpoinen yläkoulun matematiikassa, koska se vaatii opiskelijoilta erityistä matematiikan osaamista. Menetelmä voisi sopia esimerkiksi yliopistotasoiseen opiskeluun.

4.3 Opiskeltavista asioista

Aloitustestin perusteella oppilaat eivät tunnistaneet funktiota. Sen perusteella tulin siihen johtopäätökseen, että ennen kuin opiskellaan varsinaisia fraktaaligeometrian tehtäviä, olisi opiskeltava funktion käsite laajemmin kuin se nykyisin opiskellaan. Aritmeettisen ja geometrisen jonon yleinen termi osattiin myös huonosti. Tulos oli luonnollinen, koska asiaa ei opeteta nykyisissä yläkoulun kursseissa. Myös raja-arvot ja sarjojen summat osattiin huonosti, koska nekään eivät kuulu nykyisiin opetussuunnitelmiin. Laadin suunnitelmat näiden asioiden opiskelemiseksi ennen fraktaaligeometrian tehtäviä. Suunnitelmien laadinnassa käytin hyväksi lukion pitkän matematiikan kurssien opetussuunnitelmia.

Joukkojen äärettömyys ja äärellisyys osattiin melko hyvin. Samoin osattiin hyvin jonojen kasvaminen ja väheneminen, vaikka näitäkään asioita ei ole sisällytetty yläkoulun opetussuunnitelmaan. Näitä asioita ei sen vuoksi opiskeltu ennen varsinaisia fraktaaligeometrian tehtäviä.

5. Edeltävät oppitunnit

5.1 Ajankohta

Huomasin melko nopeasti, että sopivin ajankohta fraktaaligeometrian oppituntien pitämiseksi yläasteella oli 9. luokan loppulukuvuosi. Syynä tähän oli mm. se, että monet opiskeltavat asiat olivat 7.- ja 8.luokkalaisille hieman liian vaikeita. Tällöin oppitunnit jäivät suppeammiksi kuin 9.luokkalaisilla. Toisaalta 9.luokkalaisilla on yksi matematiikan viikkotunti enemmän kuin 7.-ja 8.luokkalaisilla. Tällöin opetussuunnitelma on hieman väljempi kuin alemmilla luokilla. Toukokuuhun mennessä on myös opiskeltu yleensä tilastomatematiikkaa lukuun ottamatta koko yläasteen matematiikan kurssi.

Fraktaalien opiskelussa on tärkeää, että oppilaat ymmärtäisivät tyydyttävästi funktion, äärettömyyden, suppenemisen ja raja-arvon käsitteet. Sen vuoksi varasin kolme oppituntia näiden asioiden opiskeluun, ennen kuin aloitimme fraktaalien opiskelun. Funktion käsittelyyn kului hieman enemmän kuin yksi oppitunti, raja-arvon ja suppenemisen käsittelyyn yksi oppitunti ja äärettömyyden käsittelyyn vajaa yksi oppitunti. Kolme oppituntia antoivat oppilaille peruskäsityksen asioista. Jotta olisi saavutettu syvempi ymmärrys, niin oppitunteja olisi täytynyt olla vähintään kymmenen. Tässä tutkimuksessa siihen ei ollut mahdollisuutta.

5.2. Funktio

5.2.1 Funktion opettamisesta eri aikoina

Funktio opiskellaan nykyisessä opetussuunnitelmassa ensimmäisen kerran 7. luokan kevätlukukaudella (1, s.134). Funktio esitetään koneena, joka suorittaa siihen syötetylle luvulle tietyn säännön mukaiset laskutoimitukset ja tulostaa vastauksen. Koneeseen siis syötetään syötteitä ja se tulostaa tulosteita. Kahdeksannella luokalla funktiota ei mainita missään yhteydessä. Yhdeksännellä luokalla funktio f määritellään säännöksi, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo $f(x)$ (3, s.62).

Peruskoulun alkuaikoina 1970- ja 1980-luvuilla funktio määriteltiin huomattavasti laajemmin. Silloin määriteltiin termit relaatio, kuvaus, kuva, alkio, määrittelyjoukko, arvojoukko, injektio, surjektio ja bijektio. Lisäksi määrittelyssä ja tehtävissä käytettiin joukko-opin merkintöjä, jotka eivät kuulu nykyiseen opetussuunnitelmaan. (9, s.78-92).

Nykyisessä opetussuunnitelmassa funktion määrittely ohitetaan siis lähes kokonaan. Funktion ymmärtäminen on kuitenkin tärkeää matematiikan opiskelun kannalta. Vanhojen opetussuunnitelmien perusteella olivat 13-16 -vuotiaat oppilaat 1970- ja 1980-luvuilla tarpeeksi kypsiä ymmärtämään funktioon liittyviä matemaattisia käsitteitä. Mielestäni tämän ikäiset oppilaat voivat myös 2010-luvulla opiskella samoja asioita, kuin 1970-luvulla.

5.2.2 Oppitunti

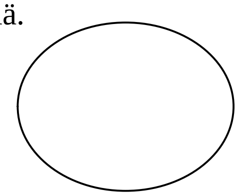
Oppitunnin tarkoituksena oli se, että oppilaat ymmärtäisivät funktion määritelmän. Lisäksi tarkoituksena oli opiskella matemaattisia merkintöjä, jotta funktio voitaisiin määritellä matemaattisesti.

Opiskelumenetelmänä käytin perinteistä menetelmää, jossa opettaja esitti uudet asiat taululla. Tein näin, koska merkinnät olivat oppilaille täysin uusia ja vieraita. Opiskelu tapahtui 3-4 oppilaan ryhmissä. Pyrin tekemään ryhmistä mahdollisimman heterogeenisia, jotta lahjakkaimmat oppilaat pystyivät neuvomaan ryhmän muita jäseniä.

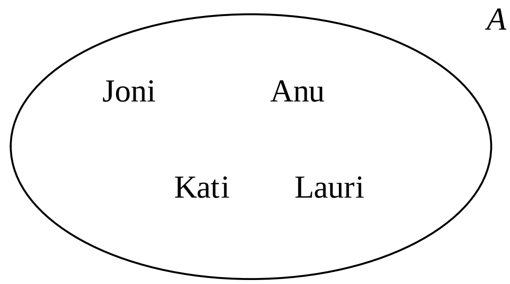
Aluksi opiskelimme peruskäsitteet joukko ja alkio. Joukko on sanana tuttu oppilaille. Annoin ensimmäiseksi tehtäväksi siis määritellä sanan joukko. Useimmat ryhmät osasivat sijoittaa joukkoon erilaisia asioita, yleensä puhuttiin ihmisjoukosta tai tavarajoukosta. Vastausten perusteella keskustelimme näistä erilaisista joukoista. Huomattiin, että joukko voi sisältää tietyn lukumäärän eri asioita. Näin saatiin yhteys sanan joukko ja matematiikan välille. Jatkokysymyksenä esitin kysymyksen: ”Voiko joukko olla tyhjä?”. Suurin osa ryhmistä oli sitä mieltä, että joukko ei voi olla tyhjä. Päätelmää perusteltiin yleensä sillä, että sana joukko sisältää monikon. Siis sen täytyy sisältää jotain ja se ei voi olla tyhjä. Totesin kuitenkin, että joukko voi olla myös tyhjä. Perustelin asian siten, että täytyy olla ensin joukko käsitteenä, ennen kuin voin sisällyttää sinne jotain. Siis ennen sitä täytyy olla tyhjä joukko.

Alkio oli myös tuttu sana. Kysyttäessä alkion merkitystä, yhdistivät oppilaat sen yleensä biologiaan. Esitettiin, että kasvilla tai eläimellä voi olla alkio. Alkiota ei siis osattu yhdistää matematiikkaan. Sen vuoksi määriteltiin alkio. Tämän määritelmän mukaisesti joukko koostuu alkioista. Toisin sanoen kaikki joukkoon kuuluvat asiat ovat tämän joukon alkioita. Alkioita on siis aina jokin lukumäärä.

Seuraavaksi opiskelimme joukkoon ja alkioon liittyvät merkinnät. Sovimme, että joukko voidaan esittää alla olevalla piirrosmerkinnällä.

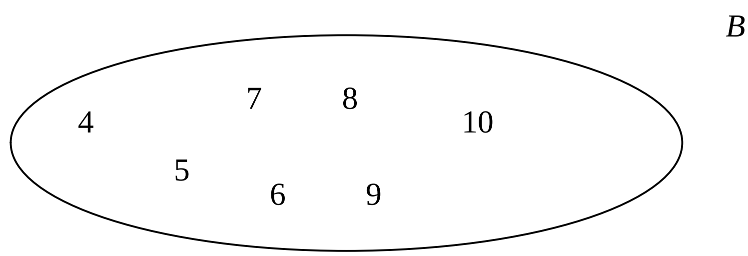


Sovimme myös, että joukkoon kuuluvat alkiot voidaan sijoittaa piirrosmerkinnän sisälle. Alkiot voivat olla esimerkiksi lukuja, kirjaimia tai sanoja. Jos ne ovat sanoja, niin ne voivat edustaa konkreettisia asioita. Annoin oppilaille tehtäväksi piirtää joukon *A*, jonka alkioina olisivat ryhmän oppilaat. Tehtävä osoittautui helpoksi. Vastaukseksi saatiin siis esimerkiksi alla oleva piirros.



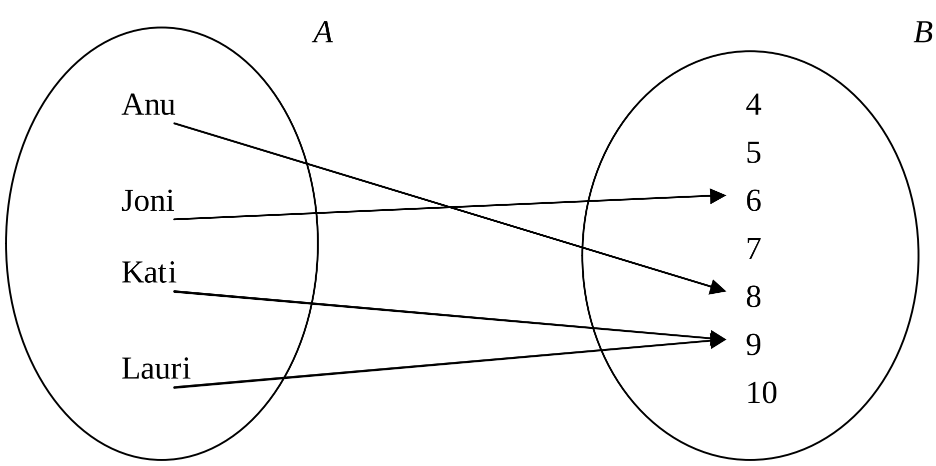
Sovimme, että joukon *A* alkiot voidaan merkitä aaltosulkujen väliin pilkulla erotettuna. Saatiin siis esimerkiksi joukko $A = \{Anu, Joni, Kati, Lauri\}$.

Oppilaiden seuraavana tehtävänä oli piirtää joukko *B*, jonka alkioina olisivat kaikki mahdolliset matematiikan arvosanat. Ryhmät osasivat helposti tehdä alla olevan piirroksen.



Sovimme, että voidaan sanoa esimerkiksi alkion 8 kuuluvan joukkoon *B*. Matemaattisesti voimme merkitä silloin $8 \in B$.

Seuraavana tehtävänä oli yhdistää nuolella ryhmän jäsenet heidän matematiikan numeroihin. Tarkennuksena sanoin, että joukossa B voivat olla mukana kaikki mahdolliset arvosanat, vaikka ryhmän jäsenillä ei ole näitä arvosanoja. Saatiin siis esimerkiksi alla oleva piirros. Osa ryhmistä sijoitti joukot toisinpäin.



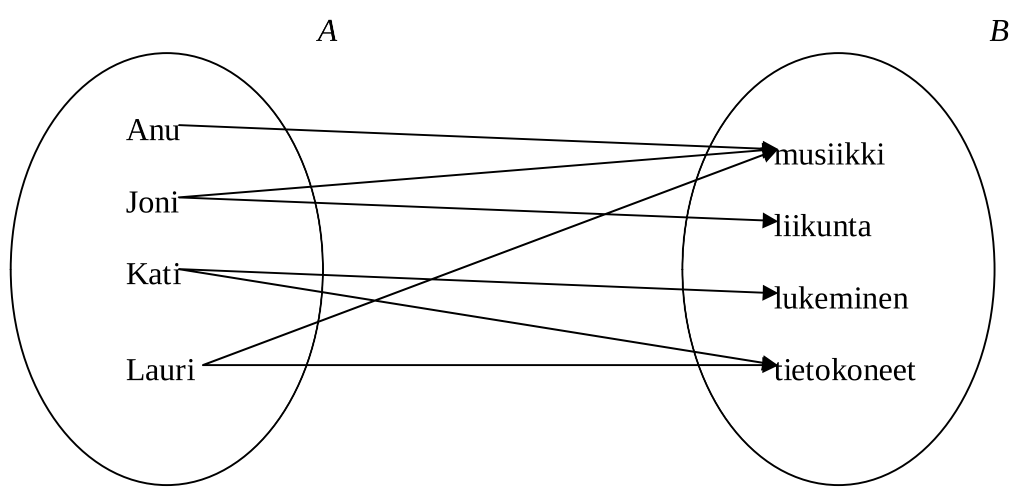
Sovimme, että tällaista nuolikuviota, jossa joukon A alkioilla on vastaava pari joukossa B, sanotaan relaatioksi. Relaatio on siis järjestettyjen parien joukko joukosta *A* joukkoon *B*. Sovittiin, että tämä relaatio voidaan merkitä $C = \{(Anu,8),(Joni,6),(Kati,9),(Lauri,9)\}$.

Merkitsimme seuraavaksi joukon *B* niitä arvosanoja, jotka olivat joukosta *A* tulevien nuolten päätepisteinä, kirjaimella *D*. Huomattiin, että nämä arvosanat ovat osa joukosta *B*. Sovittiin, että tällaista joukkoa sanotaan joukon *B* osajoukoksi. Silloin voidaan merkitä $D \subseteq B$. Ryhmien seuraavana tehtävänä oli etsiä kaikki ne joukon *A* osajoukot, joissa on kolme alkiota. Tehtävä oli selvästi helppo, sillä mahdolliset neljä osajoukkoa löytyivät helposti.

Seuraavaksi määrittelimme funktion ja kuvauksen. Sovimme, että sellaista relaatiota joukosta *A* joukkoon *B*, jossa joukon *A* jokaista alkiota vastaa korkeintaan yksi alkio joukossa *B*, sanotaan funktioksi eli kuvaukseksi joukosta *A* joukkoon *B*. Esimerkiksi edellisen esimerkin relaatio on funktio, koska jokaisella oppilaalla on ainoastaan yksi matematiikan numero. Funktiota merkitään yleensä kirjaimella *f*.

Määrittelimme lisäksi määrittelyjoukon ja arvojoukon. Sovimme, että funktiossa joukosta *A* joukkoon *B*, joukon *A* alkiot muodostavat määrittelyjoukon M_f ja ne joukon *B* alkiot, jotka ovat järjestetyissä pareissa, arvojoukon A_f. Edellisessä esimerkissä voidaan siis merkitä $M_f = \{Anu, Joni, Kati, Lauri\}$ ja $A_f = \{6,8,9\}$.

Annoin ryhmille seuraavaksi tehtäväksi keksiä sellaisia relaatioita joukosta *A* joukkoon *B*, jotka eivät ole funktioita. Nämä relaatiot piti esittää nuolikuviona. Tehtävä oli melko haastava, sillä moni ryhmä ei tehtävää heti osannut. Annoinkin lisäohjeena miettiä esimerkiksi asioita, joita jokaisella oppilaalla voisi olla useita. Kun olimme ottaneet muutaman esimerkin, niin miltei kaikki ryhmät keksivät helposti uusia esimerkkejä. Eräs vastaus oli oppilaan ja harrastuksen välinen relaatio. Silloin saatiin esimerkiksi alla oleva nuolikuvio.



Joissakin ryhmissä tuli tilanteita, joissa joukon *A* kaikista alkioista ei lähtenyt nuolta joukkoon *B*. Löytyi siis oppilaita, joille ei löytynyt harrastusta joukosta *B*. Joissakin ryhmissä yhdelle oppilaalle löytyi useampi kuin yksi harrastus joukosta *B*. Huomasimme, että näissä tapauksissa ei ollut kyse funktiosta, sillä funktion määritelmän mukaisesti jokaista joukon *A* alkiota vastaa täsmälleen yksi joukon *B* alkio.

Seuraavaksi esitin ryhmille funktion yleisen merkitsemistavan. Sovittiin, että jos f on mielivaltainen funktio joukosta A joukkoon B ja $(x, y) \in f$ on mielivaltainen pari, niin voidaan merkitä $y = f(x)$. Funktion toiminta voidaan esittää tämän jälkeen kaksoispisteellä erotettuna. Siis esimerkiksi $y = f(x)$: ”lukuun x lisätään luku 2”. Matemaattisilla merkinnöillä $y = f(x): f(x) = x + 2$. Määrittelyjoukko voidaan merkitä $M_f = A$ ja arvojoukko $A_f = B$.

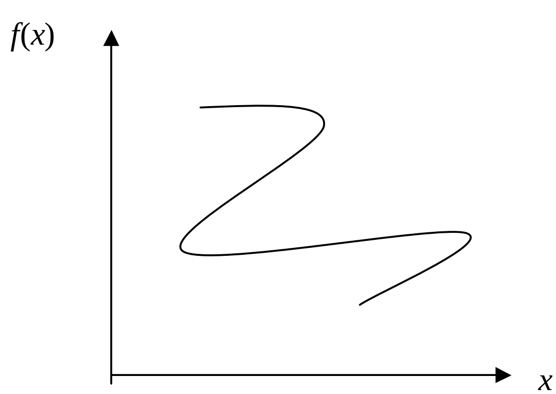
Siirryimme seuraavaksi matemaattisiin funktioihin. Pyysin ryhmiä laskemaan taulukkoon sellaisen funktion $y = f(x): \; f(x) = 2x$ viisi suuruusjärjestyksessä ensimmäistä arvoa, jossa $x \in \mathbb{N}$ eli määrittelyjoukko $M_f = \mathbb{N}$. Pyysin myös määrittelemään funktion arvojoukon. Kaikki ryhmät eivät muistaneet luonnollisten lukujen merkintää $\mathbb{N}$. Pienellä opastuksella miltei kaikki ryhmät osasivat kuitenkin tehdä alla olevan taulukon.

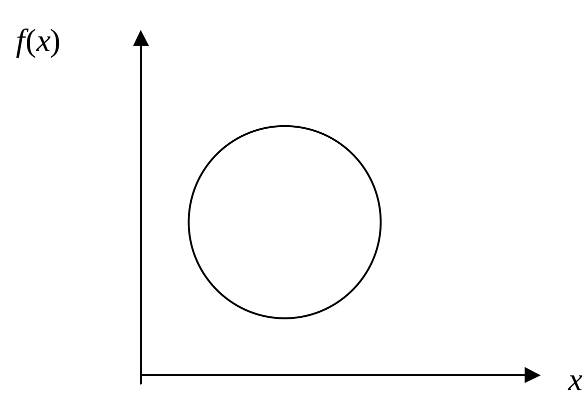
x	$y = 2x$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

Moni ryhmä kirjoitti arvojoukoksi joukon $A_f = \{0,2,4,6,8,\ldots\}$. Huomattiin helposti, että joukolla ei ole suurinta arvoa ja se on joukon $\mathbb{N}$ osajoukko. Voidaan siis merkitä $A_f \subseteq \mathbb{N}$.

Oppitunnin lopuksi pyysin oppilaita piirtämään sellaisen funktion $y = f(x): f(x) = 2x$ kuvaajan, jossa $M_f = \mathbb{R}$. Melko moni ryhmä huomasi, että kuvaaja on suora, sillä suorat oli opiskeltu 9. luokan analyyttisen geometrian kurssissa. Huomattiin myös, että tällaisen funktion arvojoukko $A_f = \mathbb{R}$.

Annoin oppilaille kotitehtäväksi piirtää sellaisen funktion $y = f(x): f(x) = x^2$ kuvaajan, jossa $M_f = \mathbb{R}$. Toiseksi tehtäväksi annoin etsiä sellaisen matemaattisen relaation, joka ei ole funktio. Kotitehtävistä ensimmäinen osattiin melko hyvin, sillä paraabelin kuvaaja kuuluu 9. luokan kurssiin. Toinen tehtävä oli vaikea, sillä peruskoulun matematiikan kursseihin ei kuulu sellaisia matemaattisia relaatioita, jotka eivät ole funktioita. Kävimme tehtävän yhdessä läpi piirtämällä (x, y)-koordinaatiston. Piirsin koordinaatistoon ympyrän (kuva alla). Näytin ympyrän kuvaajasta sen, että samaa x:n arvoa voi vastata kaksi eri y:n arvoa. Silloin ympyrän matemaattinen lauseke ei voi olla funktio. Annoin oppilaille jatkotehtäväksi piirtää muita vastaavanlaisia kuvaajia. Melko helposti he löysivät erilaisia, alla kuvatun kaltaisia käyriä, joissa yhtä x:n arvoa vastaa vähintään kaksi y:n arvoa.





Oppilaita olivat hyvin kiinnostuneita siitä, millaisia olisivat tällaisten kuvausten matemaattiset yhtälöt. Totesin, että ympyrän yhtälö voi olla esimerkiksi muodoltaan $x^2 + y^2 = 9$. Totesin myös, että tällaisia käyriä opiskellaan vasta jatko-opinnoissa.

5.2.3. Havaintoja oppitunnista

Oppitunnin tarkoituksena oli se, että oppilaat oppisivat matemaattisia merkintöjä, joiden perusteella voidaan määritellä tyydyttävästi funktio. Toisena tarkoituksena oli se, että oppilaat ymmärtäisivät funktion määritelmän. Oppilaat oppivat matemaattiset merkinnät melko helposti. Jos olisi ollut aikaa tehdä harjoitustehtäviä merkinnöistä, niin ne olisivat jääneet vielä paremmin mieleen. Funktion määritelmä ymmärrettiin melko hyvin sen esimerkin avulla, jossa etsittiin henkilöille matematiikan arvosanoja. Oppilaat ymmärsivät, että jokaisella oppilaalla voi olla vain yksi arvosana. Matemaattisesta lausekkeesta he eivät asiaa ymmärtäneet yhtä hyvin. Sen sijaan kotitehtävä, jossa pyydettiin etsimään matemaattista lauseketta, joka ei ole funktio, selvensi asiaa melko hyvin. Moni ymmärsi tehtävän käsittelyssä, millainen funktion kuvaajan tulisi olla.

Mielestäni funktion opiskelu peruskoulussa funktiokoneen avulla ilman matemaattisia merkintöjä on liian yksinkertaista. Funktion käsite jää oppilaille epäselväksi. Se vaikeuttaa myös matematiikan opiskelua jatko-opinnoissa. Joukko-opin merkinnät voisi opiskella jo alemmilla luokilla. Näinhän tehtiin jo 1970-luvulla. Myöhemmin funktio voitaisiin opiskella 9. luokalla tarkemmin käyttäen oikeita matemaattisia merkintöjä.

5.3 Äärettömyys

5.3.1 Oppitunti

Ennakkotestin perusteella oppilaat pystyivät erottamaan hyvin äärettömät joukot äärellisistä joukoista. Äärettömyyttä ei ole koulussa määritelty, joten oppilaiden käsitys perustuu pelkästään intuitioon sanasta äärettömyys. Oppitunnin tarkoitus oli antaa oppilaille peruskäsitteitä, joiden perusteella he voisivat ymmärtää äärettömyyden matemaattisen perustan. Tehtävät tehtiin 3-4 oppilaan ryhmissä. Asia oli uusi, joten tehtävät olisivat olleet hieman liian vaikeita yksin pohdittaviksi.

Ensimmäiseksi annoin pareille tehtäväksi pohtia käsitteitä äärellinen määrä ja ääretön määrä. Määrä oletettiin tunnetuksi suomen kieleen ja matematiikkaan liittyväksi käsitteeksi. Melko moni ryhmä osasikin ottaa pohtimisen avuksi luvut. Tultiin siis sellaiseen johtopäätökseen, että äärellinen määrä voidaan esittää tiettynä lukuna, mutta ääretöntä määrää ei voida esittää lukuna.

Seuraavaksi annoin oppilaille tehtäväksi selvittää lyhyesti äärettömän ja äärellisen joukon eron. Tässä tehtävässä oli tärkeää se, että oppilaat käyttivät oikeaa terminologiaa. Tehtävässä mainittiin jo käsite joukko. Oppilaiden oli siis huomattava, että joukko koostuu alkioista ja heidän oli siis käytettävä alkion käsitettä selvityksessä. Melko moni ryhmä ymmärsi äärettömän ja äärellisen joukon eron, muttei osannut käyttää selvityksessä alkion käsitettä. Pieni osa ryhmistä osasi tehdä tehtävän alkion käsitteen sekä äärellisen ja äärettömän määrän käsitteiden avulla. Äärellinen joukko määriteltiin siis sellaiseksi joukoksi, jossa on äärellinen määrä alkioita ja ääretön joukko joukoksi, jossa on ääretön määrä alkioita.

Kolmantena tehtävänä oppilaat etsivät esimerkkejä äärettömistä lukujoukoista. Oppilaat esittivät yleensä, että kaikki heille tutut lukualueet ovat äärettömiä. Lukualueista mainittiin useimmiten luonnolliset luvut ja kokonaisluvut. Osa ryhmistä mainitsi myös rationaaliluvut ja reaaliluvut. Jatkotehtävänä annoin ryhmille tehtäväksi etsiä lukusuoralta kaksi sellaista peräkkäistä lukua, joiden välissä ei ole olemassa lukua. Melko nopeasti ryhmät huomasivat, ettei tällaisia lukuja ole olemassa. Tämä huomio oli selvästi yllätys monille oppilaille. Kaikki oppilaat eivät siis olleet ymmärtäneet reaalilukusuoran käsitettä. Jatkotehtävä herätti muutaman kerran myös keskustelua epäyhtälöistä. Eräs ryhmä esitti esimerkiksi kysymyksen siitä, mikä on ensimmäinen luku nollan jälkeen. Tultiin helposti tulokseen, ettei sellaista lukua ole olemassa. Aina löydettiin luku, joka oli lähempänä nollaa, kun verrattiin sitä edelliseen lukuehdotukseen. Jatkokeskusteluissa huomattiin monesti myös intuitiivisesti se tosiasia, että kaikilla pienilläkin lukusuoran väleillä on ääretön määrä lukuja.

Seuraavana tehtävänä pyysin ryhmiä esittämään luonnollisten lukujen joukon matemaattisilla merkeillä kahdella eri tavalla. Miltei kaikki ryhmät osasivat esittää luonnolliset luvut merkinnällä $\mathsf{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Osa ryhmistä huomasi sen, että lukualue voitaisiin myös merkitä $\mathsf{N} = \{\ldots,3,2,1,0\}$. Keskustelun jälkeen huomattiin, että lukualue voitaisiin myös merkitä $\mathsf{N} = \{\ldots,5,3,1,2,4,6,\ldots\}$. Luonnollisten lukujen joukkoa ei siis tarvitse välttämättä järjestää, sillä joukon alkiot pysyvät samoina vaikkei niitä järjestetä esimerkiksi suuruusjärjestykseen. Jatkotehtävänä pyysin oppilaita kirjoittamaan parillisten luonnollisten lukujen joukon matemaattisilla merkeillä ja merkitsemään joukkoa tunnuksella N_2. Moni ryhmä osasi merkitä joukon $\mathsf{N}_2 = \{2,4,6,8,\ldots\}$. Seuraavaksi oppilaat pohtivat joukkojen N ja N_2 on suuruutta toisiinsa verrattuna. Miltei kaikki ryhmät olivat sitä mieltä, että joukko N on suurempi kuin joukko N_2. Perusteluina esitettiin usein se huomio, että joukko N_2 on selvästi joukon N osajoukko. Oppilaat pohtivat seuraavaksi lukujoukon N_2 äärettömyyttä. Moni ryhmä oli sitä mieltä, että joukko N_2 on ääretön, koska siinä on ääretön määrä lukuja.

Lopuksi oppilaat pohtivat lopputulosta, jonka mukaisesti ääretön joukko N_2 on äärettömän joukon N osajoukko. Voiko siis ääretön joukko olla toisen äärettömän joukon osajoukko? Miltei kaikki ryhmät olivat sitä mieltä, että vastaus on myönteinen. Kysyinkin siis seuraavaksi: Milloin joukko on ääretön? Kysymyksen asettelu oli melko ilmeinen, joten moni ryhmä huomasi sen tosiasian, että joukko on ääretön silloin, kun sen osajoukko on ääretön. Jatkotehtävänä pohdiskelimme olisivatko myös muut lukualueet äärettömiä. Tulimme siihen johtopäätökseen, että myös kokonaisluvut, rationaaliluvut ja reaaliluvut ovat äärettömiä, koska luonnollisten lukujen joukko on näiden kaikkien lukualueiden osajoukko.

5.3.2 Havaintoja oppitunnista

Äärettömyyden käsite oli oppilaille intuitiivisesti tuttu. Ihmiselle muodostuu selvästi jo lapsena käsitys jonkin asian lopullisuudesta tai äärettömyydestä. Sanotaanhan usein jo pienelle lapselle, että avaruus on ääretön ja jatkuu loputtomiin. Onkin ihmeellistä, että matematiikan opetuksessa ei käsitellä äärettömyyttä millään tavalla peruskoulun aikana. Oppitunnin aikana kävi selväksi, että äärettömyyden matemaattisen käsittelyn perustana on joukko-opin peruskäsitteiden ja lukualueiden osaaminen. Lukualueet opiskellaan jo 7.-ja 8. luokalla, joten niiden piti olla oppilaille entuudestaan tuttuja. Sen sijaan joukko-opin peruskäsitteet, kuten joukko ja osa-joukko, eivät kuulu peruskoulun opetussuunnitelmaan. Tällä oppitunnilla nämä käsitteet olivat oppilaille kuitenkin tuttuja edelliseltä oppitunnilta.

Oppitunnin tehtävät olivat osalle oppilaista melko vaikeita, sillä jouduin ohjaamaan melko paljon tehtävien ratkaisussa. Kaikki oppilaat eivät osanneet lukualueita hyvin, joten lukualueiden määrittely olisi syytä käydä tarkemmin vielä esimerkiksi 9. luokan syksyllä.

5.4 Suppeneminen ja raja-arvo

5.4.1 Oppitunti

Aritmeettinen ja geometrinen lukujono opiskellaan suppeasti 7.luokalla. Tällöin ei käsitellä lukujonon suppenemista. Oppitunnin tarkoituksena oli tutkia sellaisia geometrisia lukujonoja, jotka suppenevat ja etsiä niille matemaattisesti raja-arvo. Koska raja-arvon tutkimisessa tarvitaan potenssisääntöjä, niin kertasin oppitunnin aluksi potenssisäännöt, jotka oli käsitelty 8.luokalla. Esittelin myös muutaman esimerkin, joissa eksponenttina oli kirjain. Tehtävät suunniteltiin yksinkertaisiksi, koska vaativammat tehtävät vaativat murtolausekkeiden osaamista. Murtolausekkeet kuuluvat lukion opetussuunnitelmaan. Opiskelu tapahtui edelleen 3-4 oppilaan heterogeenisissa ryhmissä. Ryhmät saivat käyttää laskinta tehtävien ratkaisussa.

Tunnin aluksi esitellyt esimerkit potenssisäännöistä olivat seuraavat:

1) $2^{n-1} \cdot 2 = 2^{n-1+1} = 2^n$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$

3) $\left(2^3\right)^n = 2^{3n}$

Ensimmäisenä tehtävänä piti muodostaa taulukkoon funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, jossa $x \in N$, arvojoukon 10 ensimmäistä arvoa. Tehtävä vaati paljon opastusta, sillä funktion merkinnät eivät olleet vielä kaikille selviä. Saatiin siis alla oleva taulukko.

x	$f(x)$
1	1
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{25}$
6	$\frac{1}{36}$
7	$\frac{1}{49}$
8	$\frac{1}{64}$
9	$\frac{1}{81}$
10	$\frac{1}{100}$

Seuraavaksi pyysin oppilaita kirjoittamaan funktion arvojoukon lukujonona silloin, kun määrittelyjoukkona on koko luonnollisten lukujen joukko. Tehtävä oli melko helppo, sillä vain osalta ryhmistä jäi merkitsemättä jonon lopun kolme pistettä. Saatiin siis lukujono $\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}, \ldots\right\}$.

Sovittiin, että lukujonon ensimmäistä jäsentä voidaan merkitä kirjaimella a_1, toista jäsentä kirjaimella a_2 jne. Pyysin ryhmiä merkitsemään vastaavalla tavalla sellaisen jonon jäsenen, jonka järjestysluku on *n*. Kaikki osasivat merkitä kirjaimen a_n, mutteivät huomanneet merkitä jäsenen arvoa. Jouduin siis tarkentamaan tehtävää. Pyysin siis ryhmiä merkitsemään jäsenen arvon kirjaimen *n* avulla. Miltei kaikki huomasivat, että lukujonon jäsenet ovat murtolukuja, joissa osoittaja pysyy koko ajan lukuna 1 ja nimittäjä on sama kuin lukujonon jäsenen järjestyluvun neliö. Näin saatiin merkintä $a_n = \frac{1}{n^2}$. Huomattiin, että merkintä oli samanlainen kuin alkuperäisessä funktiossa sillä erotuksella, että funktion kirjain *x* oli korvattu kirjaimella *n*.

Pyysin ryhmiä seuraavaksi kuvailemaan lukujonon käyttäytymistä. Useimmat vastaukset olivat sellaisia lauseita, kuten ”jonon seuraava luku on aina pienempi kuin edellinen” tai ”jonon luvut pienenevät koko ajan”. Annoin tehtäväksi etsiä lukujonon viimeisen jäsenen arvon. Sain yleensä melko nopeasti vastauksen, jonka mukaan tehtävä oli mahdoton. Perusteluna esitettiin useimmiten se tosiasia, että lukujonossa on ääretön määrä jäseniä. Siis ei ole olemassa viimeisimmän jäsenen arvoa. Tarkensin tehtävää kysymällä ryhmiltä sitä lukua, mitä viimeisen jäsenen arvo lähestyy. Pyysin ryhmiä kokeilemaan laskimella siten, että sijoitetaan merkintään $a_n = \frac{1}{n^2}$ kirjaimen *n* paikalle mahdollisimman suuria lukuja. Useimmat ryhmät huomasivat, että luvun *n* kasvaessa, arvo lähestyy lukua nolla. Sovittiin, että tällaista lukujonoa, jonka viimeinen jäsen lähestyy jotain tiettyä lukua, sanotaan suppenevaksi lukujonoksi. Lisäksi sovittiin, että tätä lukua, jota kohti lukujono lähestyy, sanotaan lukujonon raja-arvoksi. Vastaavasti, jos lukujonon arvo lähestyy ääretöntä, niin voidaan sanoa, että lukujonon raja-arvo on silloin ääretön.

Pyysin ryhmiä seuraavaksi etsimään arvojoukot ja raja-arvot funktioille $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $g(x) = 1^x$ ja $h(x) = 2^x$, joissa $x \in \mathbb{N}$. Oppilaat saivat käyttää tehtävässä laskinta apuna. Funktion $h(x)$ arvojoukoksi saatiin laskimen avulla joukko $\{2,4,8,16,32,64,128,\ldots\}$. Huomattiin, että se on luonnollisten lukujen osajoukko. Funktion $f(x)$ arvojoukoksi saatiin laskimen avulla $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots\right\}$. Arvojoukko oli siis rationaalilukujen osajoukko. Huomattiin helposti, että funktion $g(x)$ arvo on yksi kaikilla *x*:n arvoilla. Tällöin funktion $g(x)$ arvojoukko on $\{1\}$.

Osa ryhmistä huomasi, että funktion $f(x)$ arvot pienenevät, kun *x* kasvaa. Pienenemistä perusteltiin sillä, että osoittajan arvot kasvavat hitaammin kuin nimittäjän arvot. Tällöin löydettiin funktion raja-arvoksi nolla. Ryhmät huomasivat helposti, että funktion $h(x)$ arvot kasvavat äärettömän suuriksi, kun *x* kasvaa. Siis funktion $h(x)$ raja-arvo on ääretön. Kaikki huomasivat, että funktion $g(x)$ arvo on yksi kaikilla *x*:n arvolla. Herätti keskustelua voidaanko tätä lukua pitää raja-arvona. Keskustelun jälkeen todettiin, että jos funktio saa saman arvon kaikilla määrittelyjoukon arvoilla, niin se on silloin funktion raja-arvo. Siis funktion $g(x)$ raja-arvo on yksi.

5.4.2 Havaintoja oppitunnista

Murtolukujen laskutoimitukset ovat yläkoululaisille vaikeita, vaikka niiden perusteet opetetaan jo alakoulussa. Sen vuoksi tehtävät olivat useille ryhmille vaikeita. Myös funktiomerkinnät olivat edelleen useille ryhmille vaikeita. Jonon arvon lähestyminen kohti tiettyä raja-arvoa ymmärrettiin helposti, kun asia esitettiin konkreettisesti esimerkiksi lukusuoralla. Abstraktinen raja-arvo laskemalla oli selvästi vaikea asia ymmärtää, sillä se olisi vaatinut enemmän esimerkkejä yksinkertaisilla funktioilla.

6. Fraktaaligeometrian oppitunnit

6.1 Johdantoa

Oppituntien tarkoituksena oli tutustuttaa oppilaita fraktaaligeometrian perusteisiin. Sen vuoksi oppitunneilla käsiteltiin ainoastaan itsensä kaltaisia fraktaaleja. Osittain muuntuvissa fraktaaleissa ja säännöllisissä fraktaalijoukoissa tarvitaan matematiikkaa, joka ei kuulu peruskoulun opetussuunnitelmaan. Tarkoituksena oli myös hyödyntää opiskelussa edeltävinä oppitunteina opiskeltuja asioita funktio, äärettömyys, suppeneminen ja raja-arvo.

Opiskelu tapahtui edelleen 3-4 oppilaan heterogeenisissa ryhmissä. Tarkoituksena oli, että ryhmät etenevät tehtävissä mahdollisimman itsenäisesti. Opettaja antoi ongelman, johon ryhmät etsivät ratkaisun. Kun jokainen ryhmä oli löytänyt ratkaisun, niin ryhmien ratkaisut käytiin yhdessä läpi dokumenttikameran avulla. Jos oikeata ratkaisua ei löytynyt, niin opettaja esitti oikean ratkaisun. Työvälineinä olivat piirtokolmio, harppi, laskin ja tehtäväpaperit. Viimeisellä oppitunnilla tutkittiin tietokoneen avulla erilaisia fraktaaleja.

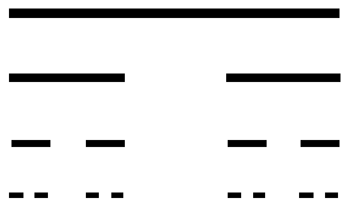
Pedagogisena lähtökohtana ei ollut pelkästään tiettyyn pedagogiaan perustuva opetus. Oppitunneissa käytettiin perinteisen, yhteistoiminnallisen ja konstruktiivisen pedagogiikan menetelmiä.

6.2 Fraktaaleista

6.2.1 Historiaa

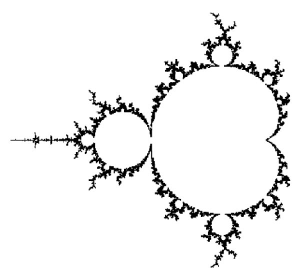
Itsesimilaarisuus on keskeinen termi fraktaaligeometriassa. Geometriassa se tarkoittaa sitä, että alkuperäinen muoto toistuu tietyssä mittakaavassa. Se on ollut tuttu matematiikassa jo ennen fraktaaligeometrian kehittämistä. Geometriassa sitä on käytetty esimerkiksi säännöllisen viisikulmion lävistäjien piirtämisessä ja kultaisessa leikkauksessa. Algebrassa itsesimilaarisuuteen liittyvät läheisesti rekursiokaavat, joita esiintyy Fibonaccin luvuissa ja sarjakehitelmissä.

Fraktaalien käsitteen ja teorian loi 1970-luvun alussa amerikkalainen matemaatikko Benoit Mandelbrot, joka toimi IBM-yhtiön tutkijana. Hän havaitsi, että tiedonsiirrossa esiintyvien virheiden ajallinen jakautuma oli tarkasteltavasta aikavälistä riippumaton. Jakautuma oli muodoltaan joukko, joka saadaan, kun janan keskeltä poistetaan ensin kolmasosa. Näin syntyvien kahden janan keskeltä poistetaan taas kummastakin kolmasosa. Sen jälkeen jatketaan samalla periaatteella niin kauan kuin pystytään. Syntynyt kuvio (kuva 2) tunnettiin jo aikaisemmin Cantorin kehittämänä joukkona.



Kuva 2. Cantorin joukko.

Samanlaista jaksojen itsensätoistuvuutta Mandelbrot näki myös hintojen aikasarjoissa ja monissa luonnon rakenteissa ja muodostelmissa. Näiden pohjalta hän loi fraktaalien käsitteen ja perustan fraktaaligeometrialle. Tietokoneiden kehityttyä hän pystyi tutkimaan fraktaalien geometrisia kuvioita ja matemaattista perustaa paremmin. Hän kehitteli tietokoneiden avulla mm. nimeään kantavan geometrisen fraktaalin, kuvan 3 mukaisen, Mandelbrotin joukon.



Kuva 3. Mandelbrotin joukko. (http://cp4space.files.wordpress.com/2012/09/monochrome.png)

Nykyisin fraktaaligeometriaa voidaan hyödyntää esimerkiksi signaalinkäsittelyn sovelluksissa, internet-liikenteen mallintamisessa ja laaja-kaistayhteyksiin soveltuvissa antenneissa.

6.2.2 Fraktaaligeometrian perusteita

Fraktaali on matemaattinen muunnos, joka on rajattu tietylle alueelle. Kun sovitaan, että tämän alueen pisteitä merkitään kirjaimilla P_i , missä i on luonnollinen luku, ja merkitään matemaattista muunnosta kirjaimella F ja valitaan vielä muunnoksen F alkuperäiseksi pisteeksi P_0, niin saadaan toistamalla muunnosta F järjestyksessä muunnetut pisteet :

$P_1 = F(P_0), P_2 = F(P_1), P_3 = F(P_2), \ldots, P_n = F(P_{n-1})$, missä n on luonnollinen luku.

Tällöin syntynyt muunnos on fraktaali.

Muunnokset voidaan tehdä rajatulle pistejoukolle tai alkiolle. Tällaisia pistejoukkoja ovat esimerkiksi viivat, pinnat tai kappaleet. Objekti on siis 1- , 2- tai 3-ulotteinen. Teoriassa voidaan tarkastella kuitenkin useampiulotteisiakin fraktaaleja. Niiden havainnollistaminen on kuitenkin vaikeaa, sillä fraktaalit esitetään yleensä kuvina.

Muunnoskierroksia sanotaan iteraatioiksi. Teoriassa iteraatioita voi olla äärettömän monta. Alkuperäistä objektia sanotaan alustajaksi ja muunnosfunktion kuvaajaa generoijaksi.

6.2.3 Fraktaalityypit

6.2.3.1 Itsensä kaltaiset fraktaalit

Itsensä kaltaiset fraktaalit ovat matemaattisesti yksinkertaisimpia fraktaaleja. Säännöllinen itsensä kaltainen fraktaali muodostetaan käyttämällä tiettyä geometrista muotoa alustajana. Tämän alustajan osat korvataan generoijalla. Iterointikierroksia voidaan tehdä periaatteessa äärettömän monta. Itsensä kaltaiset fraktaalit koostuvat osista, jotka näyttävät koko objektilta pienoiskoossa. Objektin osat muodostetaan skaalaamalla objektin muotoja. Skaalaamisen määrittelee skaalauskerroin. Se kuvaa kuinka moneen osaan objekti jakaantuu iteroitaessa ja se voi olla kaikille osille sama tai voi vaihdella osien mukaan. Skaalauskertoimen arvo riippuu objektin ulottuvuudesta eli dimensiosta. Alkuperäinen objekti on alustaja. Muunnosfunktion kuvaaja on generoija. Generoijan on oltava samaa ulottuvuutta kuin alustaja. Itsensä kaltaisiin fraktaaleihin voidaan lisätä satunnaisuutta, jos valitaan jokaisella iterointikierroksella generoija käyttämällä koordinaatiomuunnoksissa satunnaisarvoja tai valitsemalla generoija tietyistä ennalta määrättyjen muotojen joukosta.

Merkitään skaalauskerrointa kirjaimella s, osien lukumäärää kirjaimella n ja dimensiota kirjaimella D. Osien lukumäärä on luonnollinen luku, skaalauskerroin ja dimensio rationaaliluku. Jos muunnos on iteroitaessa sama, voidaan fraktaalidimensio laskea kaavasta:

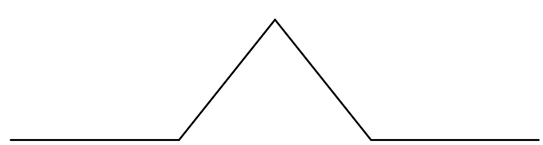
$$n \cdot s^D = 1, \text{ jolloin } \quad D = \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln s}$$

Jos skaalauskerroin vaihtelee iteroitaessa, voidaan dimensio laskea kaavasta $\sum_{k=1}^{n} s_k^D$.

Tällöin:

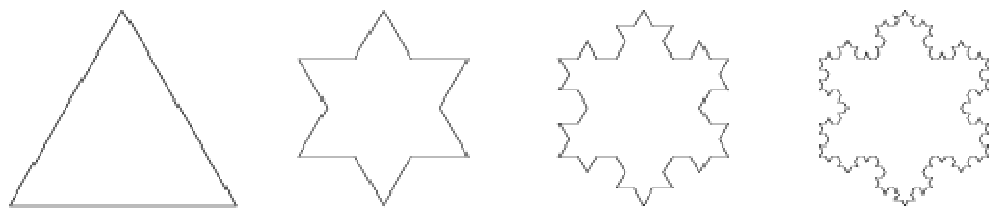
1) alustajan ollessa 1-ulotteinen, on $1 < D \leq 2$.
2) alustajan ollessa 2-ulotteinen, on $2 < D \leq 3$.
3) alustajan ollessa 3-ulotteinen, on $3 < D \leq 4$.
4) alustajan ollessa k-ulotteinen, on $k < D \leq k+1$.

Esimerkki itsensä kaltaisista fraktaaleista on Kochin lumihiutale, jossa alustajan jokainen jana korvataan jokaisella iteraatiokierroksella neljällä osajanalla, joiden pituus on kolmasosa korvatun janan pituudesta. Seuraavalla alla olevassa kuvassa 4 on esitetty generoija.



Kuva 4. Generoija.

Alustaja ja kolme iteraatiokierrosta on esitetty alla olevassa kuvassa 5.



Kuva 5. Kochin lumihiutale. Alustaja ja iteraatiot.

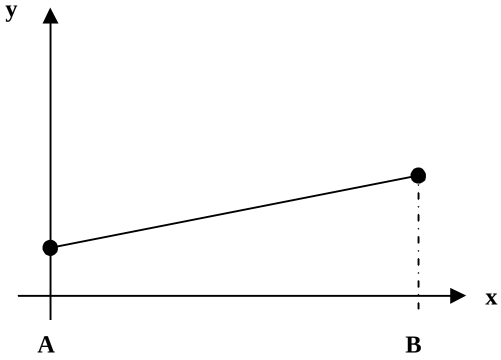
Kochin lumihiutaleessa yhdestä janasta muodostuvien osien lukumäärä $n = 4$ ja skaalauskerroin $s = \frac{1}{3}$. Tällöin fraktaalidimensio $D = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln s} = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26$.

Tällaisen fraktaalin alustajan janan pituus kasvaa siten, että jokaisella iterointikierroksella pituus kerrotaan kertoimella $\frac{4}{3}$. Silloin reunakäyrän pituus lähestyy ääretöntä, kun iteroidaan äärettömän monta kertaa.

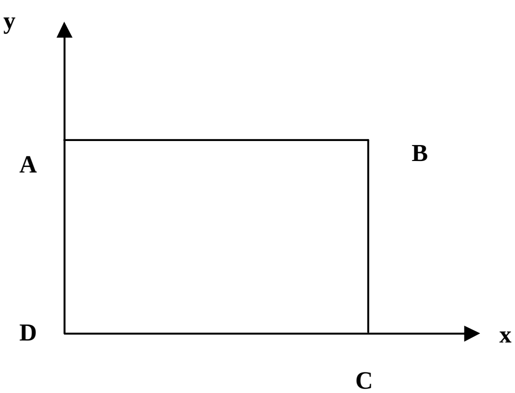
6.2.3.2 Osittain muuntuvat fraktaalit

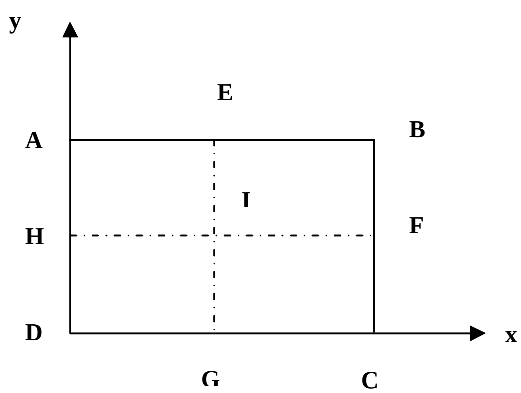
Osittain muuntuvissa fraktaaleissa voidaan satunnaislukujen avulla ohjata fraktaalien muodostumisperusteita. Yksiulotteiselle objektille voidaan valita aloituspiste, jota iteroitaessa poikkeutetaan satunnaisesti siten, että muodostuu fraktaalikäyrä. Kaksiulotteiselle objektille voidaan myös valita satunnaisesti aloituspiste, jota poikkeutetaan satunnaisesti. Tällöin muodostuu fraktaalipinta. Pinnanmuotoja voidaan ohjailla rajoittamalla satunnaisuutta.

Aloituspisteen ollessa janan keskipiste, sille lasketaan uusi y-koordinaatin arvo y_2 janan päätepisteiden y-koordinaattien keskiarvon ja x-koordinaattien erotuksesta riippuvan satunnaisarvon summana. Tällöin saadaan $y_2 = \frac{1}{2}\left[y(A) + y(B)\right] + s \cdot r \cdot \left|B - A\right|$, missä A on janan alkupisteen x-koordinaatti, B on jana päätepisteen x-koordinaatti, s on käyrän epätasaisuutta kuvaava kerroin ja r on satunnaisluku väliltä $(-1{,}1)$. Proseduuria toistetaan kaikille janan puolikkaille, kunnes puolikkaiden pituus alittaa ennalta määrätyn raja-arvon. Pituuden $\left|B - A\right|$ arvo pienenee jokaisella kierroksella. Siis mahdolliset satunnaisarvotkin pienenevät. Tällöin voidaan saada alkuperäisestä janasta esimerkiksi seuraavalla sivulla olevan kuvaajan mukainen käyrä muutaman iteraatiokierroksen jälkeen.



Kun sovelletaan satunnaispoikkeutusta esimerkiksi suorakulmaiselle pohjatasolle ABCD, niin voidaan jäljitellä maaston pinnanmuotoja. Valitaan aluksi tason kulmapisteille A, B, C ja D korkeuden alkuarvot z_A, z_B, z_C, z_D. Sen jälkeen taso jaetaan osiin särmien keskipisteistä, jolloin saadaan alla olevien kuvioiden mukaisesti pisteet E, F, G, H ja I.



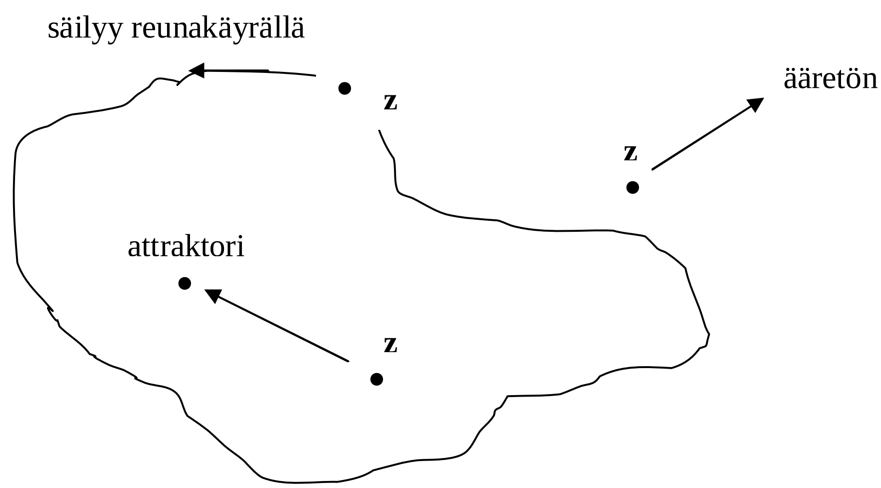


Särmien keskipisteille E, F, G ja H lasketaan uudet korkeusarvot särmän päätepisteiden korkeuksien keskiarvon ja särmän pituudesta riippuvan satunnaisarvon summana. Tällöin saadaan esimerkiksi pisteelle E korkeudeksi $z_E = \frac{1}{2}\left[z_A + z_B\right] + s \cdot r \cdot \left|B - A\right|$, missä s on pinnan epätasaisuutta kuvaava kerroin ja r on satunnaisluku väliltä $(-1,1)$. Tason keskipisteen I arvo voidaan tämän jälkeen laskea pisteiden E ja G tai F ja H avulla. Proseduuri toistetaan samalla tavalla pohjatason neljänneksille, kunnes särmän pituus alittaa asetetun raja-arvon.

Keskipisteen poikkeutusmenetelmällä muodostettavan fraktaalin pinnanmuotoja voidaan ohjailla rajoittamalla korkeusarvot tietylle välille pohjatason eri osissa. Näin tapahtuu, jos määritetään ohjauspinnat pohjatason ylle. Tällöin jokaisen uuden korkeusarvon satunnaisosuus lasketaan verrannollisena pisteelle lasketun keskiarvon ja ohjauspinnan korkeusarvon erotukseen. Ohjauspinnat ovat tavallisesti monikulmioita. Myös muunlaisten pintojen käyttö on mahdollista.

6.2.3.3 Säännölliset fraktaalijoukot

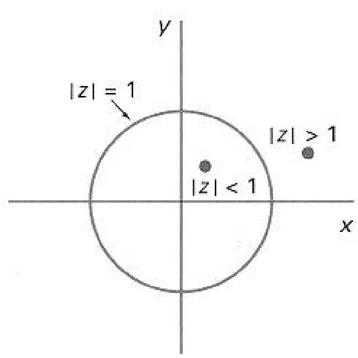
Säännöllisissä fraktaalijoukoissa muunnoksia voidaan soveltaa kompleksitason pisteisiin. Kahdessa ulottuvuudessa kompleksiluvut ovat muotoa $z = x + iy$, missä x ja y ovat reaalilukuja ja $i^2 = -1$. Merkitään muunnosfunktiota $f(z)$. Se sisältää neliöön korottamisen z^2. Tällaista muunnosta voidaan kutsua neliöönkorotusmuunnokseksi ja syntyvää kuviota neliöön korottuvaksi fraktaaliksi. Kun iteraatioiden alkupiste on kompleksialueen ulkopuolella, niin muunnettu piste lähestyy ääretöntä. Kun alkupiste on kompleksialuee sisäpuolella, niin muunnettu piste lähestyy tiettyä pistettä, jota kutsutaan attraktoriksi. Muunnettu piste pysyy reunakäyrällä, jos alkupiste on reunakäyrällä. Alla olevassa kuvassa on esitetty eri tilanteet kompleksitasossa.



Yksikköympyrässä alkupisteen arvot voivat olla :

(1) | z | = 1 , jolloin piste on yksikköympyrän kehällä.
(2) | z | < 1 , jolloin piste on yksikköympyrän sisällä.
(3) | z | > 1 , jolloin piste on yksikköympyrän ulkopuolella.

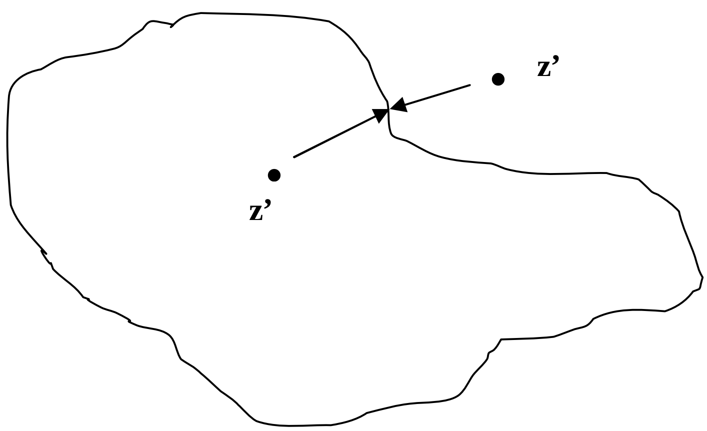
Yksikköympyrä on esitetty alla olevassa kuvassa 6.



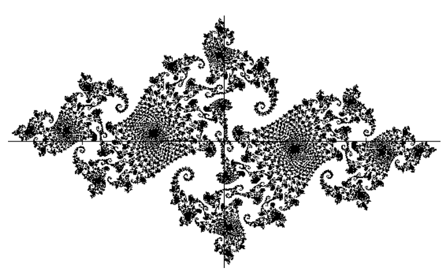
Kuva 6. Yksikköympyrä.

Kun | z | = 1 , niin muunnosfunktio muuntaa pisteen siten, että se säilyy jollakin reunakäyrällä.
Kun | z | < 1 , niin muunnosfunktio muuntaa pisteen siten, että se lähestyy jotain pistettä. Tällaista pistettä sanotaan attraktoriksi.
Kun | z | > 1 , niin muunnosfunktio muuntaa pisteen siten, että se lähestyy ääretöntä.

Joillakin funktioilla äärettömyyttä tai attraktoria lähestyvien pisteiden välinen reuna muodostaa fraktaalin. Yksinkertaisilla muunnoksilla nopein tapa Julian joukon muodostamiseksi on käyttää muunnoksen käänteisfunktiota $z = f^{-1}(z')$. Tällöin fraktaalin reunan sisä- tai ulkopuolelta valittu piste lähestyy alla olevan kuvan mukaisesti reunaa.



Syntyvä kuvio riippuu muunnosfunktiosta. Jos funktio on sopiva, niin äärettömyyttä tai attraktoria lähestyvien pisteiden välinen reuna voi muodostaa esimerkiksi alla olevan kuvan 7 mukaisen Julian joukon tai aikaisemmin esitellyn, kuvan 3 mukaisen, Mandelbrotin joukon. Säännöllisiä fraktaalijoukkoja voidaan muodostaa myös soveltamalla pistejoukkoon toistuvasti epälineaarista käänteismuunnosta.



Kuva 7. Julian joukko.
(http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b1/Julia_set_(ice).png/256px-Julia_set_(ice).png) Julia_set_(ice).png)

Esimerkki monipuolisia fraktaaleja tuottavista muunnosfunktioista on $z' = f(z) = \lambda z(1-z)$, missä λ on jokin kompleksilukuvakio. Fraktaalin reunakäyrän etsimiseen voidaan käyttää käänteisfunktiota $z = f^{-1}(z') = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4z'}{\lambda}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{d}\right)$, kun merkitään $d = 1 - \frac{4z'}{\lambda}$. Tästä funktiosta saadaan x- ja y-koordinaateiksi:

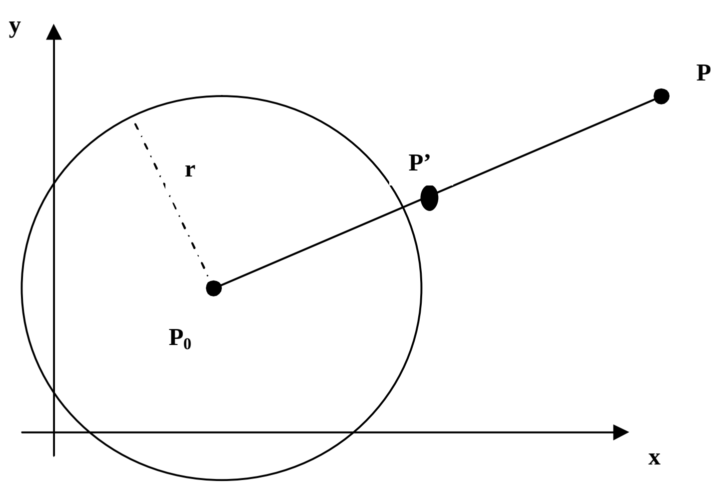
$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{|d| + \mathrm{Re}(d)}{2}}\right)$$
$$y = \mathrm{Im}(z) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|d| - \mathrm{Re}(d)}{2}}\,.$$

Esimerkiksi Mandelbrotin joukko muodostuu kompleksiluvuista z, jotka eivät hajaannu muunnoksessa:

$$\begin{cases} z_0 = z \\ z_k = z_{k-1}^2 + z_0,\, k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Alussa kompleksitason pisteelle z lasketaan muunnos $z^2 + z$. Seuraavalla kierroksella muunnettu piste korotetaan neliöön ja lisätään alkuperäinen z. Proseduuria toistetaan, kunnes voidaan nähdä, onko valittu piste fraktaalin reunalla vai ei.

Käänteisfraktaalit muodostetaan soveltamalla epälineaarista käänteismuunnosta toistuvasti pistejoukkoon. Esimerkkinä kaksiulotteisesta käänteismuunnoksesta on $\left(\overline{P_0P}\right)\left(\overline{P_0P'}\right) = r^2$. Muunnoksella ympyrän, jonka keskipiste on $P_0 = (x_0, y_0)$ ja säde r, ulkopuolella sijaitseva piste P muunnetaan ympyrän sisäpuolelle pisteeksi P’. Vastaavasti ympyrän sisäpuolella sijaitseva piste muunnetaan pisteeksi ympyrän ulkopuolelle alla olevan kuvaajan mukaisesti.



Jos $P=(x,y)$ ja $P'=(x',y')$, niin edellä mainittu käänteismuunnos voidaan esittää muodossa $\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{(x'^2+y'^2)}=r^2$. Koska pisteet sijaitsevat ympyrän keskipisteen kautta kulkevalla suoralla, niin $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}$. Tällöin muunnetuiksi koordinaateiksi saadaan:

$$x'=x_0+\frac{r^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$y'=y_0+\frac{r^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}$$

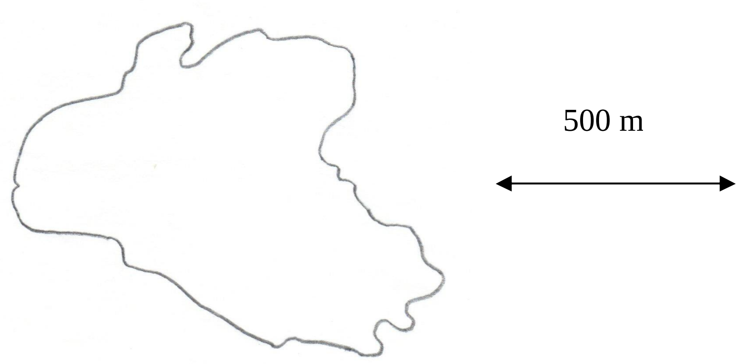
Kun muunnoksen kohteena on toinen ympyrä, jonka kehä ei kulje pisteen P_0 kautta, saadaan muunnettu ympyrä. Erilaisia fraktaaleja voidaan muodostaa käyttämällä kohteena ympyröiden joukkoa ja toistamalla muunnosta eri ympyröiden suhteen.

6.3 Oppitunnit

6.3.1 Ensimmäinen oppitunti

6.3.1.1 Tunnin suoritus

Oppitunnin tarkoituksena oli tutkia suljetun itseään leikkaamattoman murtoviivan pituutta. Oppilaat saivat oppituntia varten tehdyn tehtäväpaperin (liite 3). Tehtävät tehtiin 3-4 oppilaan heterogeenisissä ryhmissä. Ensin oppilaille näytettiin Alasjärven karttakuva. Ensimmäisenä tehtävänä oli arvioida järven rantaviivan pituus. Rantaviivan pituudeksi määriteltiin Alasjärveä ympäröivän viivan pituus. Arvioinnin apuna oli kuvan yhteyteen piirretty jana, jonka todellinen pituus oli annettu. Alla oleva kuva 8 esittää oppilaille annettua karttakuvaa.

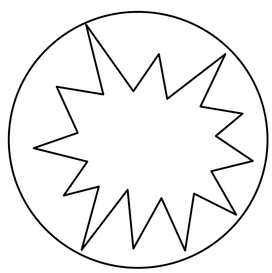


Kuva 8. Alasjärvi.

Vastaukset vaihtelivat yleensä 2 km:n ja 5 km:n väliltä. Muutama ryhmä esitti pituudeksi yli 5 km. Yksi ryhmä esitti, että rantaviivaa on mahdoton tarkasti mitata. Perusteluna oli se, että rantaviiva muuttuu veden korkeuden mukana ja se on muutenkin epäsäännöllinen ja repaleinen. Tämä vastaus herätti keskustelua, sillä moni ryhmä oli sitä mieltä, että pituus pitäisi arvioida ympäröivien teiden tai polkujen pituuksien perusteella. He mittasivat viivoittimella järveä ympäröivän kuvitellun tien osien pituudet ja arvioivat niiden perusteella järven rantaviivan pituuden. Oltiin esimerkiksi sitä mieltä, että jos autolla ajetaan Alasjärven ympäri, niin auton matkamittari voisi näyttää lukemaa 3,0 km. Pääteltiin, että tällöin Alasjärven ympärysmitta ei voisi ylittää samaa lukemaa.

Ryhmien seuraavana tehtävänä oli pohtia voidaanko ympyrän sisälle piirtää suljettu itseäänleikkaamaton murtoviiva, jonka piirin pituus on suurempi kuin ympyrän kehän pituus. Miltei kaikki ryhmät olivat sitä mieltä, että tällainen murtoviiva voidaan piirtää. Pyysin seuraavaksi piirtämään ensin paperiarkille ympyrän, jonka säde oli 3,0 cm. Sen jälkeen pyysin heitä piirtämään ympyrän sisään mahdollisimman pitkän suljetun murtoviivan, joka ei saanut leikata itseään. Pyysin myös laskemaan ympyrän kehän pituuden ja arvioimaan murtoviivan pituuden.

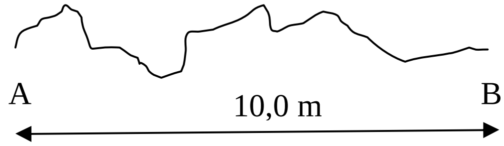
Kaikki ryhmät osasivat laskea ympyrän kehän pituuden kaavalla $p = 2\pi r$. Tulokseksi saatiin noin 19 cm. Kaikki ryhmät piirsivät murtoviivan, jonka piiri oli suurempi, kuin ympyrän kehän pituus. Pisimmät arviot murtoviivan pituudesta olivat noin yksi metri. Tultiin siis sellaiseen johtopäätökseen, että ympyrän sisään voidaan piirtää sellainen suljettu murtoviiva, jonka piiri on huomattavasti suurempi kuin ympyrän kehän pituus. Esimerkkinä alla oleva kuva 7.



Kuva 9. Ympyrä

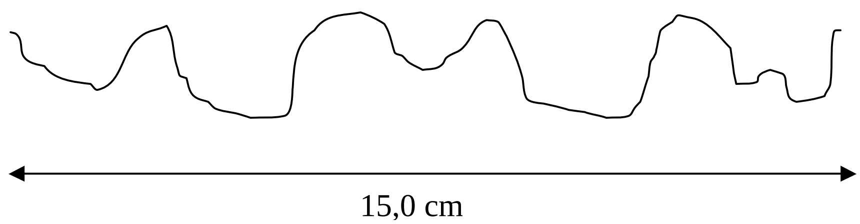
Näytin seuraavaksi projektorilta uudestaan Alasjärven kartan ja pyysin ryhmiä arvioimaan uudestaan järven ympärysmitan. Kävimme vastaukset läpi ryhmittäin suullisesti. Pituudeksi arvioitiin nyt huomattavasti suurempia lukuja kuin ensimmäisellä arviointikerralla. Arvioitiin jopa yli 20 kilometrin pituuksia. Tultiin siis siihen tulokseen, että rantaviivan pituus voi olla huomattavasti suurempi kuin, mitä esimerkiksi auton matkamittari näyttäisi ajettaessa järven ympäri.

Näytin seuraavaksi suurennetun alla olevan kuvan Alasjärven rantaviivasta. Kuvan yhteyteen oli piirretty jana, jonka pituus oli luonnossa 10,0 m. Pyysin ryhmiä pohtimaan kuinka pitkä oli rantaviivana merkitty viiva AB.



kuva 10. Rantaviiva

Kävimme vastaukset läpi ryhmittäin suullisesti. Huomattiin, että rantaviiva on huomattavasti pidempi kuin 10,0 m. Jatkotehtävänä piti piirtää ensin paperiarkille 15,0 cm:n mittainen jana. Sen jälkeen ryhmien piti piirtää janan viereen ilman viivoitinta kuviteltu järven rantaviiva tätä janaa vastaavalta pituudelta. Pyysin vielä arvioimaan viivan pituutta. Vastaukseksi saatiin mielikuvituksellisia viivoja, jotka katsottiin dokumenttikameralla. Alla esimerkki piirroksesta.



kuva 11. Jana

Huomattiin, että viivojen pituus oli aina huomattavasti suurempi kuin janan pituus. Keskustelimme vielä siitä, kuinka lyhyt jana pitäisi piirtää, jotta sen viereen piirretty rantaviiva olisi yhtä pitkä kuin jana. Tulimme helposti siihen tulokseen, että janan pitäisi olla äärimmäisen pieni. Aina voitaisiin piirtää tähän janaan pieni poikkeama. Tällöin siitä tulisi viiva, jonka pituus olisi suurempi kuin vastaavan janan pituus. Keskustelussa tuli kuitenkin esiin se tosiasia, että tällaisista viivoista koostunut rantaviiva olisi melko teoreettinen. Huomattiin, että esimerkiksi rantaviivaan kuuluva kivi ei ole tasainen. Myös siinä on pieniä epätasaisuuksia, joten viivan pituutta on kivestä vaikea mitata.

Pyysin ryhmiä lopuksi vielä kerran arvioimaan järven rantaviivan pituutta. Usea ryhmä oli sitä mieltä, että pituutta ei voida mitata. Jotkut ryhmät esittivät pituudeksi ääretöntä. Eräs ryhmä huomasi esittää, että pituus riippuu siitä kuinka tarkasti pituus pitäisi mitata. Keskusteltuamme asiasta tulimme siihen tulokseen, että teoreettisesti laskettuna rantaviivan pituus lähestyy ääretöntä, sillä pienintä mahdollista janaa vastaisi aina sitä pitempi rantaviiva. Käytännössä pituus riippuisi kuitenkin mittausvälineistä, sillä ei ole olemassa sellaisia mittausvälineitä, joilla voitaisiin mitata pituuksia absoluuttisen tarkasti. Huomattiin myös, että rantaviivan pituus voi riippua siitä, mihin tarkoitukseen pituutta tarvitaan. Jos halutaan esimerkiksi kävellä rannan ympäri, niin pituus voidaan arvioida kävelyteitä pitkin sadan metrin tarkkuudella.

Oppitunnin lopuksi tulimme siihen johtopäätökseen, että suljetun viivan pituutta on vaikea mitata tarkasti. Pituus lähestyy ääretöntä, jos suljettuun viivaan voidaan tehdä äärettömän monta poikkeamaa. Viivan pituuteen vaikuttavat myös käytetyt mittausvälineet ja pituuden käyttötarkoitus.

Annoin oppilaille kotitehtäväksi Alasjärven pinta-alan määrittämisen. Toisena kotitehtävänä tuli etsiä internetistä tietoja erilaisista rantaviivojen pituuksia. Esimerkiksi kuinka pitkä on jonkin saaren rantaviiva.

6.3.1.2 Havaintoja oppitunnista

Oppilaat pitivät selvästi oppitunnin tehtävistä. Syynä oli ehkä se, että ne poikkesivat melko paljon tavallisista matematiikan oppituntien tehtävistä. Tehtävät herättivät keskustelua ryhmien sisällä ja ryhmien välillä. Osa tehtävistä aiheutti jopa kiistelyä oikeista ratkaisuista. Tehtävät eivät olleet liian vaikeita, sillä ne tehtiin helposti. Johtopäätöksen tekeminen onnistui kaikissa ryhmissä. Lopputulos oli selvästi joillekin ryhmille yllätys ja se herätti keskustelua vielä tunnin lopuksikin.

6.3.2 Toinen oppitunti

6.3.2.1 Oppitunnin suoritus

Oppilaat esittivät edellisen oppitunnin kotitehtävien ratkaisuja. Useimmat oppilaat huomasivat, että Alasjärven pinta-alalle voitiin määrätä yläraja piirtämällä esimerkiksi suorakulmio järven ympärille. Pinta-alaa voitiin sen jälkeen tarkentaa pienentämällä murtoviivoilla alkuperäistä suorakulmiota. Oppilaat olivat löytäneet internetistä useita rantaviivan pituuksia. Esimerkiksi Suomen rantaviivan pituudeksi oli löydetty 314604 km. Keskustelimme mittauksen tarkkuudesta ja mittaustavasta. Moni oli sitä mieltä ettei Suomen rantaviivaa voida mitata yhden kilometrin tarkkuudella.

Toisen oppitunnin tarkoituksena oli tutustuttaa oppilaat fraktaaligeometrian peruskäsitteisiin esimerkkitehtävän avulla. Tarkoituksena oli huomata geometrisen sarjan kehittyminen piirtämällä janoja tiettyjen piirtämissääntöjen perusteella. Oppilaat täyttivät tehtävän edistyessä tehtäväpaperia, joka on esitetty liitteessä 4. Tehtävän perusteella heidän oli tarkoitus huomata miten janojen määrä kasvaa geometrisen jonon mukaisesti. Tehtävissä tarvittiin lisäksi potenssisääntöjä, jotka oli opiskeltu edeltävillä oppitunneilla. Tunnin toisena tarkoituksena oli opetella piirtämään jatkuva kuvio tietyn saman toistuvan periaatteen mukaisesti. Tällaisista kuvioistahan muodostetaan yksinkertaisia fraktaaleja.

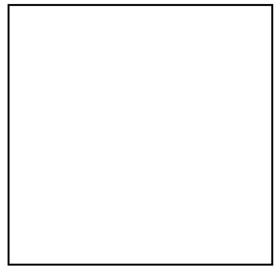
Työvälineinä olivat tehtäväpaperi, ruutupaperi, piirtokolmio ja laskin. Tehtävät tehtiin 3-4 oppilaan ryhmissä. Yksin tehtynä tehtävät olisivat olleet heikoimmille oppilaille liian vaativia. Jokainen oppilas täytti omaa tehtäväpaperia. Ryhmät pyrittiin muodostamaan siten, että ne olivat mahdollisimman heterogeenisia.

Annoin ensin oppilaille perustehtävän, jota laajennettiin vaiheittain. Jokaisen piirroskuvion jälkeen täydennettiin alkuperäistä taulukkoa. Parit tekivät tehtävät itsenäisesti omaan tahtiin. Ratkaisut esitettiin dokumenttikameralla sen jälkeen, kun jokainen pari oli saanut tehtävän valmiiksi. Tehtävissä täydennettiin taulukkoa, jonka sarakkeet olivat alla olevan taulukon mukaiset.

i	n	l	p	A
0				

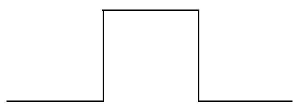
Taulukossa i tarkoittaa muunnoksen vaiheen numeroa, n janojen lukumäärää, l janan pituutta, p piiriä ja A pinta-alaa. Janan pituuden, piirin ja pinta-alan yksikkönä on ruutu. Ensimmäiseksi vaiheeksi numeroitiin nolla, sillä se on peruskuvio, johon piirretään muutokset.

Ensimmäiseksi ryhmät piirsivät ruutupaperille neliön, jonka sivun pituus oli 9 ruutua. Saatiin siis seuraavan sivun neliö ja taulukko.

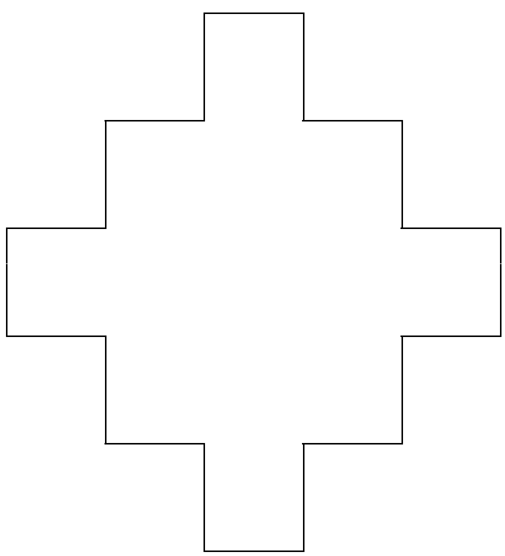


i	*n*	*l*	*p*	*A*
0	4	9	4·9=36	9·9=81

Seuraavaksi pyysin pareja tekemään peruskuvioon ensimmäisen muunnoksen. Siinä neliön jokainen sivu korvataan alla olevalla murtoviivalla.



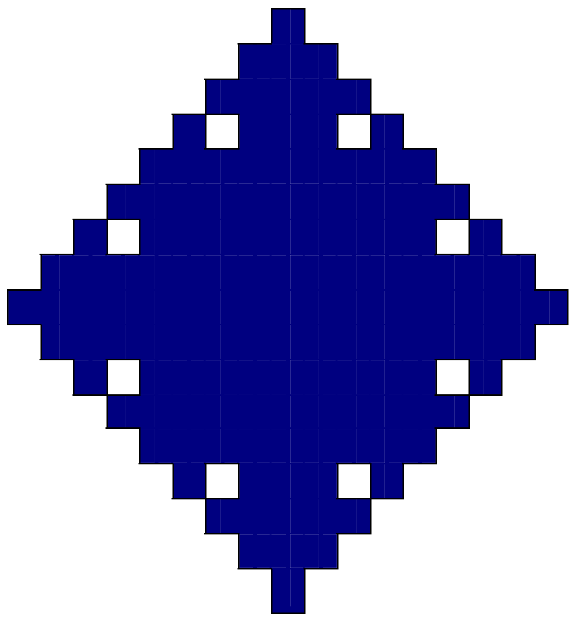
Sovittiin, että peruskuviota, jota muutetaan, sanotaan alustajaksi. Tässä tehtävässä siis alustajana on neliö, jonka sivun pituus on 9 ruutua. Muunnoskuviota sanotaan generoijaksi. Tässä tehtävässä generoija on siis yllä oleva murtoviiva, joka on muodostunut viidestä kolmen ruudun mittaisesta janasta. Sovittiin myös, että muunnoksen vaiheita sanotaan iteraatioiksi. Kun tehdään ensimmäinen muunnos, niin kyseessä on silloin ensimmäinen iteraatio. Sovittiin vielä, että tällaista itseään toistavaa kuviota sanotaan fraktaaliksi. Saatiin siis alla olevan mukainen kuvio ja taulukko.



i	*n*	*l*	*p*	*A*
0	4	9	4 · 9 = 36	9 · 9 = 81
1	20	3	20 · 3 = 60	9 · 9 + 4 · (3 · 3) = 117

Pyysin seuraavaksi pareja piirtämään seuraavan iteraation itsenäisesti. Tehtävä tuotti osalle pareista vaikeuksia. Jouduinkin siis tarkentamaan tehtävää. Selitin mitä tarkoittaa, että uudessa kuviossa jokainen jana korvataan generoijalla. Siis alkuperäinen jana jaetaan ensin kolmeen yhtä pitkään osaan. Keskimmäinen osa pyyhitään pois ja korvataan viiden janan mittaisella murtoviivalla generoijan mukaisesti. Pyysin lisäksi värittämään syntyneen kuvion.

Saatiin alla olevan kuvan mukainen kuvio ja taulukko.



i	n	l	p	A
0	4	9	$4 \cdot 9 = 36$	$9 \cdot 9 = 81$
1	$4 \cdot 5 = 20$	$\frac{9}{3} = 3$	$20 \cdot 3 = 60$	$9 \cdot 9 + 4 \cdot (3 \cdot 3) = 117$
2	$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$	$\frac{9}{9} = 1$	$100 \cdot 1 = 100$	$9 \cdot 9 + 4 \cdot (3 \cdot 3) + 20 \cdot (1 \cdot 1) = 137$

Taulukon täyttäminen oli vaikea tehtävä. Moni ryhmistä pystyi laskemaan pinta-alan suunnilleen oikein, sillä se onnistui laskemalla väritetyt ruudut. Toisen iteraation piirin ja pinta-alan lausekkeiden muodostaminen tuotti sen sijaan vaikeuksia. Opiskelimme lausekkeiden muodostamisen sen vuoksi yhdessä.

Pyysin seuraavaksi ryhmiä päättelemään kolmannen iteraation arvot taulukkoon. Pyysin myös merkitsemään lausekkeet, joilla arvot on laskettu, jotta pystyisimme päättelemään, miten arvot voidaan laskea. Tehtävä oli vaikea, sillä vain muutamat parit osasivat laskea kaikki arvot oikein. Huomattiin, että janojen lukumäärä muodosti geometrisen jonon $(4,20,100,\ldots)$. Nähtiin, että jonon seuraava jäsen saatiin kertomalla edellinen luvulla 5. Janojen lukumääräksi saatiin siis $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$. Janojen pituus muodosti geometrisen jonon $(9,3,1,\ldots)$. Jonon seuraava jäsen saatiin jakamalla edellinen luvulla 3. Janan pituudeksi saatiin siis $\frac{1}{3}$. Piiri saatiin laskettua siten, että janojen lukumäärä kerrottiin janan pituudella. Piiriksi tuli siten $500 \cdot \frac{1}{3} = 166\frac{2}{3}$. Pinta-alan laskeminen tuotti eniten vaikeuksia. Huomattiin, että edellisen iteraation pinta-alaan tuli lisäys, jossa oli 100 suorakulmiota. Jokaisen suorakulmion pinta-ala oli suuruudeltaan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Edelliseen pinta-alaan tuli siis lisäys $100 \cdot \frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}$. Kolmannen iteraation pinta-alaksi saatiin siis $137 + 11\frac{1}{9} = 148\frac{1}{9}$. Saatiin siis alla oleva taulukko.

i	n	l	p	A
0	4	9	$4 \cdot 9 = 36$	$9 \cdot 9 = 81$
1	$4 \cdot 5 = 20$	$\frac{9}{3} = 3$	$20 \cdot 3 = 60$	$9 \cdot 9 + 4 \cdot (3 \cdot 3) = 117$
2	$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$	$\frac{9}{9} = 1$	$100 \cdot 1 = 100$	$9 \cdot 9 + 4 \cdot (3 \cdot 3) + 20 \cdot (1 \cdot 1) = 137$
3	500	$\frac{1}{3}$	$166\frac{2}{3}$	$148\frac{1}{9}$

Taulukosta nähtiin, että kuvion piiri ja pinta-ala kasvavat. Pyysin ryhmiä pohtimaan seuraavaksi kuinka suureksi piiri ja pinta-ala kasvavat, jos iterointia jatketaan äärettömän monta kertaa. Miltei kaikki ryhmät olivat sitä mieltä, että piiri kasvaa äärettömän suureksi. Osa ryhmistä oli sitä mieltä, että myös pinta-ala kasvaa äärettömän suureksi. Osa oli sitä mieltä, että kuvion ympärille voidaan piirtää suorakulmio, jonka pinta-ala on suurempi kuin kuvion. Näin ollen kuviolla olisi silloin olemassa jokin yläraja. Muutama ryhmä huomasi, että pinta-alan lisäys pienenee iteraatioiden kasvaessa. Näin ollen lisäys lähestyy nollaa, joten jossain vaiheessa pinta-ala ei enää kasva. Pyysin ryhmiä pohtimaan, millä tavalla voitaisiin päätellä matemaattisesti kuinka suureksi piiri ja pinta-ala kasvavat. Muutama ryhmä ehdotti oikein, että pitäisi laatia yleinen matemaattinen lauseke piirille ja pinta-alalle sekä tutkia tämän lausekkeen käyttäytymistä.

Pyysin ensin merkitsemään janojen lukumäärät ja pituudet potenssien avulla eri iteraatiokerroilla. Iteraatiokertoja oli neljä. Sen jälkeen pyysin merkitsemään iteraatiokertaa muuttujalla x ja merkitsemään janojen lukumäärät ja janojen pituudet muuttujan x avulla. Useimmat ryhmät osasivat merkitä janojen määrät ja pituudet potenssien avulla. Vain muutamat osasivat merkitä vastaavat lausekkeet muuttujan x avulla. Saatiin siis alla oleva taulukko.

i	n	l
0	$4 \cdot 5^0 = 4$	$\frac{9}{3^0} = 1$
1	$4 \cdot 5^1 = 20$	$\frac{9}{3^1} = 3$
2	$4 \cdot 5^2 = 100$	$\frac{9}{3^2} = 1$
3	$4 \cdot 5^3 = 500$	$\frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$
4	$4 \cdot 5^4 = 2500$	$\frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}$
x	$4 \cdot 5^x$	$\frac{9}{3^x}$

Pyysin seuraavaksi ryhmiä muodostamaan piirin lausekkeen muuttujan x avulla ja päättelemään sen perusteella, mitä arvoa lauseke lähestyy, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Miltei kaikki huomasivat, että piirin lauseke saadaan siten, että janojen lukumäärä kerrotaan janan pituudella. Ongelmaksi muodostui se, että kaikki ryhmät eivät osanneet sieventää lauseketta. Tällöin he eivät osanneet päätellä matemaattisesti mitä arvoa piirin lauseke lähestyy. Yksimielisesti oltiin kuitenkin sitä mieltä, että piiri lähestyy ääretöntä. Saatiin siis lauseke $p = 4 \cdot 5^x \cdot \dfrac{9}{3^x}$. Annoin vihjeeksi käyttää potenssisääntöjä ja pyysin sieventämään lausekkeen. Tehtävä oli vieläkin vaikea, sillä vain muutama ryhmä osasi tehdä sievennyksen. Saatiin siis lauseke $p = 4 \cdot 9 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x$.

Seuraavaksi ryhmät pohtivat, onko piirin lauseke funktio. Myönteisessä tapauksessa pyysin merkitsemään funktion lausekkeen ja etsimään sen määrittelyjoukon ja arvojoukon. Kaikkien mielestä piirin lauseke oli funktio, koska jokaista muuttujan x arvoa vastasi ainoastaan yksi piirin lausekkeen arvo. Funktiota voitiin siis merkitä $p(x) = 36 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x$. Määrittelyjoukko löydettiin helposti, sillä muuttujan x arvot muodostivat jonon $\{0,1,2,3,\ldots\}$. Määrittelyjoukko oli siis luonnollisten lukujen joukko. Arvojoukkoa ei löydetty yhtä helposti. Taulukosta nähtiin, että piirin arvot olivat kokonaislukuja tai murtolukuja. Pienen pohdinnan jälkeen huomattiin, ettei piiri voi saada arvokseen irrationaalilukuja. Maalijoukoksi saatiin siis rationaalilukujen osajoukko.

Pyysin uudestaan pareja pohtimaan funktion $p(x) = 36 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x$ käyttäytymistä, kun x kasvaa äärettömäksi. Huomattiin nopeasti, että funktion lausekkeessa potenssin kantaluku $\frac{5}{3}$ on suurempi kuin yksi. Koska x on luonnollinen luku, joka voi kasvaa äärettömäksi, niin potenssi $\left(\frac{5}{3}\right)^x$ kasvaa äärettömäksi silloin, kun x kasvaa äärettömäksi. Siis funktio $p(x) = 36 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x$ kasvaa äärettömäksi silloin, kun x kasvaa äärettömäksi. Tultiin siis siihen tulokseen, että kuvion piiri kasvaa äärettömäksi, kun tehdään äärettömän monta iterointikierrosta.

Annoin seuraavaksi tehtäväksi täyttää alla olevan taulukon kolmanteen iteraatioon asti. Pyysin esittämään pinta-alan lisäykset ensin lausekkeina. Saatiin siis alla oleva taulukko.

i	ΔA
0	-
1	$4 \cdot (3 \cdot 3) = 36$
2	$(4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 1) = 20$
3	$(4 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = 11\frac{1}{9}$

Pyysin seuraavaksi pareja pohtimaan kuinka suuri yksittäinen pinta-alan lisäys tulee edelliseen kuvioon, kun tehdään neljäs iterointi. Lisäys tuli esittää potenssilausekkeina. Tehtävä oli vaikea, joten pohdimme yhdessä asiaa. Taulukosta nähtiin, että uusien kuvioiden määrä on aina sama kuin edellisen iteraaton janojen määrä ja syntynyt kuvio on neliö, jonka sivun pituus neljännessä iteraatiossa oli janan pituus $\frac{1}{9}$. Siis neljännessä iteraatiossa pinta-alan lisäys oli $500 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 6\frac{14}{81}$. Seuraavana tehtävänä oli etsiä pinta-alan lisäyksen lauseke ΔA, kun iteraatiota merkitään muuttujalla x. Saatiin siis alla oleva taulukko.

i	ΔA
0	-
1	$4 \cdot \left(\frac{9}{3}\right)^2 = 36$
2	$(4 \cdot 5) \cdot (\frac{9}{3^2})^2 = 20$
3	$(4 \cdot 5^2) \cdot (\frac{9}{3^3})^2 = 11\frac{1}{9}$
4	$(4 \cdot 5^3) \cdot \left(\frac{9}{3^4}\right)^2 = 6\frac{14}{81}$
x	$(4 \cdot 5^{x-1}) \cdot \left(\frac{9}{3^x}\right)^2$

Muutama pari osasi kirjoittaa lisäykseksi lausekkeen $\Delta A = 4 \cdot 5^{x-1} \cdot \left(\frac{9}{3^x}\right)^2$. Pyysin sieventämään lausekkeen potenssisääntöjen avulla. Tehtävä oli vaikea, joten johdimme yhdessä lausekkeen sievennyksen. Saatiin siis lauseke $\Delta A = 324 \cdot \left(\frac{5^{x-1}}{3^{2x}}\right)$. Saatiin siis funktio $\Delta A(x) = 324 \cdot \left(\frac{5^{x-1}}{3^{2x}}\right)$, jonka määrittelyjoukkona oli luonnollisten lukujen joukko ja arvojoukkona rationaalilukujen joukko. Annoin tehtäväksi pohtia mitä lukua potenssilauseke $\dfrac{5^{x-1}}{3^{2x}}$ lähestyy, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Annoin vihjeeksi, että ensin täytyy potenssi 3^{2x} muokata muotoon, jossa eksponenttina on lausekkeen osoittajan eksponentti $x-1$. Muutama pari osasi tehdä muutoksen ja päätellä tehtävän oikean ratkaisun. Saatiin siis potenssisääntöjä käyttäen $3^{2x} = \left(3^2\right)^x = 9^x = 9 \cdot 9^{x-1}$. Silloin $\dfrac{5^{x-1}}{3^{2x}} = \dfrac{5^{x-1}}{9 \cdot 9^{x-1}} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}$. Koska $\frac{5}{9}$ on pienempi kuin yksi, niin lauseke $\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}$ lähestyy nollaa, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Siis funktion $\Delta A(x) = 324 \cdot \left(\frac{5^{x-1}}{3^{2x}}\right)$ arvo lähestyy nollaa, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Lisäykseksi saatiin sievennettynä $\Delta A(x) = 324 \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{x-1} = 36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}$.

Tulimme siis siihen lopputulokseen, että pinta-alan lisäys lähestyy nollaa, kun tehdään äärettömän monta iteraatiota. Voitaisiinko siis päätellä, että pinta-alalla on matemaattinen yläraja? Totesin, että emme pysty peruskoulun matematiikalla päättelemään asiaa. Osa ryhmistä oli kuitenkin selvästi oikeassa siinä, että kuvion ympärille voidaan piirtää suorakulmio, jonka pinta-ala on suurempi kuin äärettömän monen iteraation jälkeen syntynyt kuvio. Siis pinta-alalla on näin pääteltynä olemassa yläraja.

Oppilaita kiinnosti tietää, mitä arvoa pinta-ala lähestyy, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Totesin, että arvon laskeminen vaatii lukiotason matematiikkaa, joten emme käsittele sitä. Annoinkin kotitehtäväksi etsiä laskimella luku, joka on mahdollisimman lähellä pinta-alan ylärajaa. Pyysin oppilaita tekemään taulukon, johon lasketaan 10 ensimmäisen iteroinnin aiheuttamat pinta-alan lisäykset neljän desimaalin tarkkuudella. Pinta-alan lisäyksen laskemisessa tuli käyttää tunnilla annettua kaavaa $\Delta A(x) = 36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}$. Samaan taulukkoon pyysin laskemaan likiarvoisen pinta-alan. Pyysin myös laskemaan 20. ja 50. iteroinnin aiheuttamat pinta-alan lisäykset. Tulosten perusteella oppilaiden tuli päätellä likimääräinen arvio lopulliselle kokonaispinta-alalle. Toiseksi kotitehtäväksi annoin ns. Kochin lumihiutaleen piirtämistehtävän. Tehtävä on esitetty liitteessä 7.

6.3.2.2 Havaintoja oppitunnista

Oppitunnin piirtämistehtävä oli melko helppo, sillä miltei kaikki ryhmät osasivat tehdä sen pienen opastuksen avulla. Sen sijaan tehtävään liittyvät laskutoimitukset olivat selvästi useimmille ryhmille liian vaikeita. Huomasin, että ne potenssisääntöihin liittyvät sievennystehtävät, joissa eksponenttina on kirjainmuuttuja, ovat monille oppilaille vaikeita ratkaista. Sen vuoksi teimme tällaiset sievennystehtävät yhdessä.

Useat ryhmät huomasivat yhteyden edellisen oppitunnin karttatehtävän ja tämän oppitunnin piirtämistehtävän välillä. He huomasivat, että piirretystä kuviosta muodostui suljettu itseäänleikkaamaton murtoviiva, jonka piiri lähestyi ääretöntä. Usea ryhmä pystyi myös päättelemään sen, että kuvion pinta-alalla oli yläraja. Oppilaat ymmärsivät myös sen, että tulokset voidaan päätellä matematiikan avulla.

Oppilaat pitivät selvästi piirtämistehtävästä. Monet parit osallistuivat myös mielellään pohtimistehtäviin. Matemaattisten lausekkeiden käsittely herätti myös kiinnostusta, vaikka tehtävät olivatkin vaikeita.

6.3.3 Kolmas oppitunti

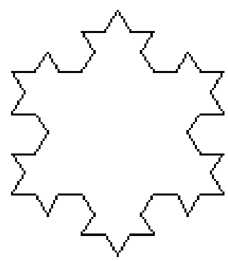
6.3.3.1 Kotitehtävät

Noin kolmasosa oppilaista oli osannut tehdä ensimmäisen kotitehtävän taulukon. Kaikille oppilaille ei ollut selvää, miten pinta-alan lisäys lasketaan laskimella. Moni ei osannut myöskään sijoittaa oikeita arvoja pinta-alan lisäyksen funktioon. Taulukko on esitetty seuraavalla sivulla.

i	A	ΔA
0	81	-
1	117	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^0 = 36$
2	137	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^1 = 20$
3	148,1111	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \approx 11{,}1111$
4	154,2839	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 \approx 6{,}1728$
5	157,7133	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4 \approx 3{,}4294$
6	159,6185	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^5 \approx 1{,}9052$
7	160,6769	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^6 \approx 1{,}0584$
8	161,2649	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^7 \approx 0{,}5880$
9	161,5916	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^8 \approx 0{,}3267$
10	161,7731	$36 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^9 \approx 0{,}1815$

Kun iteroitiin 20. kerran, niin lisäys on $36\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{19}cm^2 \approx 0{,}0005cm^2$. Lisäykseksi saatiin 50. iterointikerralla $36\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{49} \approx 0{,}00000000001cm^2$. Voidaan siis laskea, että 10. iteroinnin lisäys on enää noin 0,1% ja 20.iteroinnin lisäys noin 0,0003% sen hetkisestä pinta-alasta.50. iterointi ei enää merkittävästi kasvata pinta-alaa.Tämän perusteella voidaan siis päätellä, että pinta-ala ei paljoa kasva enää siitä suuruudesta, mikä sillä on 10. iteroinnin jälkeen. Voitaisiin siis arvioida, että pinta-alaksi jää noin 162 cm^2. Tähän tai hieman suurempaan tulokseen pääsikin usea oppilas.

Toisen kotitehtävän piirtämistehtävän osasi osittain tai kokonaan noin puolet oppilaista. Piirtämisen ongelmana oli se, etteivät kaikki oppilaat muistaneet, miten harpin avulla piirretään tasasivuinen kolmio. Alla oikea kuva toisen iterointikerran jälkeen.



Kuva 12. Kochin lumihiutale.

Taulukon täyttäminen oli selvästi vaikeampi tehtävä kuin piirtämistehtävä, sillä vain muutama oppilas osasi tehdä sen. Vaikeutena oli se, etteivät kaikki osanneet käyttää pinta-alana kirjaintunnusta *A*. Seuraavalla sivulla on oikein täytetty taulukko.

i	n	l	p	ΔA
0	3	9	$3\cdot 9 = 27$	0
1	$3\cdot 4 = 12$	$\frac{9}{3} = 3$	$12\cdot 3 = 36$	$3\cdot\frac{A}{9} = \frac{1}{3}A$
2	$3\cdot 4\cdot 4 = 48$	$\frac{9}{(3\cdot 3)} = 1$	$48\cdot 1 = 48$	$3\cdot 4\cdot\frac{A}{(9\cdot 9)} = \frac{4}{27}A$
3	$3\cdot 4^3 = 192$	$\frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$	$192\cdot\frac{1}{3} = 64$	$3\cdot 4^2\cdot\frac{A}{9^3} = \frac{16}{243}A$
4	$3\cdot 4^4 = 768$	$\frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}$	$768\cdot\frac{1}{9} = 85\frac{1}{3}$	$3\cdot 4^3\cdot\frac{A}{9^4} = \frac{64}{2187}A$
n	$3\cdot 4^n$	$\frac{9}{3^n}$	$3\cdot 4^n\cdot\frac{9}{3^n} = 36\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$	$3\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{A}{9^n} = 12A\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$

Huomataan, että piirin lauseke muuttujan *n* funktiona on $p(n) = 36\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ ja pinta-alan muutoksen lauseke $\Delta A(n) = 12A\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Kun muuttuja *n* lähestyy ääretöntä, niin piiri lähestyy ääretöntä, koska funktion lausekkeessa olevan potenssin kantaluku on suurempi kuin yksi. Pinta-alan muutos lähestyy nollaa, kun muuttuja *n* lähestyy ääretöntä, koska funktion lausekkeessa olevan potenssin kantaluku on pienempi kuin yksi. Siis kun iteroidaan äärettömän monta kertaa, niin piiri lähestyy ääretöntä ja pinta-alan muutos lähestyy nollaa. Siis pinta-alalla on olemassa jokin yläraja. Tässä tehtävässä ylärajaa ei tarvinnut määrittää.

6.3.3.2 Oppitunnin suoritus

Kolmannen oppitunnin tehtävänä tarkasteltiin yksinkertaista fraktaalia, joka pienenee. Tarkoituksena oli, että oppilaat pohtisivat voiko geometrinen kuvio, joka toistaa itseään hävitä olemattomiin. Tehtävä tehtiin edelleen 3-4 oppilaan ryhmissä. Välineinä olivat A4-kokoinen ruutupaperi, viivotin ja laskin. Ryhmät suorittivat tehtävät itsenäisesti tehtäväpaperin (liite 5) ohjeiden mukaisesti. Kävimme tehtävän läpi dokumenttikameran avulla, kun kaikki ryhmät olivat löytäneet ratkaisun. Opettaja pyrki neuvomaan tehtävän aikana mahdollisimman vähän. Tehtäväpaperi sisälsi taulukon, jota pyydettiin täyttämään vaiheittain. Alla on esitetty taulukko.

i	*n*	*l*	*p*
0			
1			
2			
3			
4			
x			

Taulukossa *i* on iterointikierrosten määrä, *n* on janojen lukumäärä, *l* on janan pituus ja *p* on janojen yhteispituus. Yksikkönä on yksi ruutu.

Pyysin ensin piirtämään alustajaksi janan, jonka pituus on 27 ruutua sekä täyttämään taulukon alustajan kohdalta. Saatin siis alustajaksi alla oleva jana.

Taulukoksi saatiin alla oleva taulukon osa.

i	*n*	*l*	*p*
0	1	27	$1 \cdot 27 = 27$

Tehtävä oli helppo, sillä kaikki osasivat piirtää alustajan. Muutama pari tarvitsi apua taulukon täyttämiseksi.

Annoin seuraavaksi ohjeen tehdä generoijan seuraavasti: jaa jana kolmeen yhtä pitkään osaan ja poista keskimmäinen osa siten, että jäljelle jää kaksi erillistä janaa. Pyysin piirtämään ensimmäisen iteroinnin alustajan alapuolelle ja täyttämään taulukkoon ensimmäisen iteroinnin tulokset.

Kuvioksi muodostuivat alla olevat janat.

Tulokseksi saatiin alla olevan taulukon osa.

i	n	l	p
0	1	27	$1\cdot 27=27$
1	2	9	$2\cdot 9=18$

Kaikki ryhmät eivät osanneet piirtää ensimmäistä iterointia, joten jouduin opastamaan jonkin verran. Generoijan esittäminen kirjallisesti oli selvästi hieman epäselvä joillekin pareille. Piirroksen jälkeen taulukon täyttäminen oli helppo tehtävä.

Seuraavaksi pyysin piirtämään edellisten kuvioiden alapuolelle toisen, kolmannen ja neljännen iteroinnin ja täyttämään taulukon iterointien kohdalta. Tarkensin vielä ohjetta pyytämällä iteroinnin aina jokaiselle uudelle janalle. Saatiin siis alla oleva kuvio ja taulukon osa.

i	n	l	p
0	1	27	$1\cdot 27=27$
1	2	$\frac{27}{3}=9$	$2\cdot 9=18$
2	4	$\frac{9}{3}=3$	$4\cdot 3=12$
3	8	$\frac{3}{3}=1$	$8\cdot 1=8$
4	16	$\frac{1}{3}$	$16\cdot\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}$

Tehtävä onnistui hyvin, sillä miltei kaikki parit osasivat tehtävän. Tehtävä oli selvästi helpompi kuin edellinen, koska parit huomasivat millä logiikalla iteroinnit tehdään.

Pyysin seuraavaksi päättelemään janojen lukumäärän, janan pituuden ja janojen yhteispituuden laskulausekkeet taulukkoon. Saatiin alla oleva taulukko.

i	n	l	p
0	1	27	$1 \cdot 27 = 27$
1	2	$\frac{27}{3} = 9$	$2 \cdot 9 = 18$
2	4	$\frac{9}{3} = 3$	$4 \cdot 3 = 12$
3	8	$\frac{3}{3} = 1$	$8 \cdot 1 = 8$
4	16	$\frac{1}{3}$	$16 \cdot \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$
x	2^x	$\frac{27}{3^x}$	$2^x \cdot \frac{27}{3^x}$

Usea ryhmä osasi kirjoittaa janojen lukumäärän lausekkeen. Binomisarja on tuttu monista matematiikan tehtävistä. Janan pituuden lausekkeen muodostaminen oli vaikea tehtävä, sillä se onnistui vain noin kolmasosalta ryhmistä. Kaikki huomasivat, että janan pituus pienenee jokaisella iterointikierroksella kolmasosaan, mutta lausekkeen muodostaminen ei kuitenkaan kaikilta onnistunut. Ne ryhmät, jotka osasivat sen muodostaa, osasivat myös tehdä janojen kokonaispituuden lausekkeen.

Seuraavaksi pyysin muodostamaan janojen yhteispituuden funktion $p(x)$ ja sieventämään sen. Pyysin vielä oppilaita päättelemään mitä lukua funktion arvo lähestyy, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Osa pareista osasi muokata janojen yhteispituuden lausekkeesta funktion $p(x) = 2^x \cdot \frac{27}{3^x} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Funktiossa olevan potenssin kantaluku on pienempi kuin yksi. Aikaisemmin opitun perusteella funktio lähestyy silloin nollaa, kun muuttuja x kasvaa äärettömäksi. Tämän perusteella voitaisiin siis päätellä, että janat häviävät, kun tehdään äärettömän monta iteraatiota. Tulos herätti paljon keskustelua, sillä se tuntuu käytännön järjen vastaiselta. Moni oppilaista oli sitä mieltä, että jos tehdään ”äärettömän mones” iterointi, niin voidaanhan se kuitenkin piirtää. Jos iteroinnin voi piirtää, niin onhan silloin olemassa jana, jolla on oltava pituus. Tällöin jana ei voi hävitä. Kysyinkin oppilailta seuraavaksi, voiko janan pituus olla nolla. Eräs oppilas esitti, että jana muodostuu pisteistä, joten sellaisen janan, jonka pituus on nolla täytyy olla piste. Siis, kun tehdään äärettömän monta iterointia, niin muodostuu äärettömän monta pistettä. Näiden yhteispituus ei voi olla siis nolla.

Kerroin oppilaille, että oppitunnilla piirretty fraktaali oli nimeltään Cantorin joukko. Annoin kotitehtäväksi tutkia internetistä, mitä tietoja oppilaat löytäisivät Cantorin joukosta. Tietojen perusteella piti etsiä vastaus oppitunnin viimeiseen tehtävään.

Toiseksi kotitehtäväksi annoin piirtämistehtäväksi ns. Sierpinskin maton. Oppilaat saivat tehtävää varten tehtävämonisteen (liite 8).

6.3.3.3 Havaintoja oppitunnista

Oppilaat eivät pitäneet oppitunnin alkuosasta niin paljon kuin aikaisemmista tunneista. Syynä oli selvästikin se, että laskut olivat vaikeampia kuin edellisellä tunnilla . Myös piirustustehtävä ei ollut niin kiinnostava ja haasteellinen kuin ensimmäisellä oppitunnilla. Janojen yhteispituuden päättely oli monelle oppilaalle liian vaikea tehtävä. Se johtui siitä, että yhteispituuden lausekkeessa oli potensseja, joissa oli kantalukuna kaksi tai kolme.

Lisätehtävät herättivät kuitenkin selvästi kiinnostusta. Kun pohdittiin janan pituuden ja yhteispituuden arvoja äärettömän monen jaon jälkeen, useat oppilaat halusivat esittää oman mielipiteensä. Raja-arvon käsite tuli näin ollen esitettyä kevyesti ensimmäisen kerran perusasteen matematiikassa.

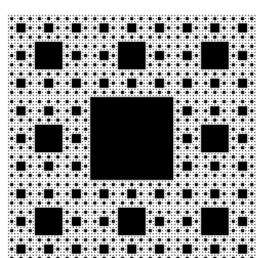
Monelle oppilaalle tuotti vieläkin vaikeuksia edetä itsenäisesti tehtävämonisteen perusteella. Selvästikin kaikki eivät ymmärrä geometrisia piirustustehtäviä, jos tehtävät annetaan kirjallisesti. Tässä tapauksessa opettajan olisi ollut syytä esittää tehtävänanto myös suullisesti.

6.3.4 Neljäs oppitunti

6.3.4.1 Oppitunnin suoritus

Tarkistimme ensiksi annetut kotitehtävät. Moni oli löytänyt internetistä osoituksen, jonka mukaan Cantorin joukosta poistetut osat ovat yhteispituudeltaan yhtä suuri kuin alkuperäisen janan pituus. Tällöin Cantorin joukon ns. Lebesquen mitta olisi nolla. Toisaalta moni oli löytänyt myös tuloksen, jonka mukaan Cantorin joukko ei ole tyhjä joukko. Tultiin siis päätelmään, jonka mukaan eityhjän joukon pituus voi olla nolla. Totesin, että aihepiiri ei kuulu peruskoulun matematiikassa opiskeltaviin asioihin. Asia herätti kuitenkin kiinnostusta.

Yli puolet oppilaista olivat osanneet tehdä toisen kotitehtävän piirustustehtävän. Tehtävässä saatiin alla olevan kuvan mukainen kuvio.



Kuva 13. Sierpinskin matto.

Oppilaat olivat eri mieltä siitä, täyttyykö alkuperäinen kuvio mustilla neliöillä, kun iterointia jatketaan äärettömän monta kertaa. Yli puolet heistä oli kuitenkin sitä mieltä ettei kuvio täyty. Neljännen oppitunnin tarkoituksena olikin päätellä matemaattisesti täyttyykö neliö.

Oppilaiden tulisi osata edellisten oppituntien perusteella työskennellä ryhmänä itsenäisesti. Annoin ryhmille liitteessä 6 olevan tehtäväpaperin. Se sisälsi alla olevan taulukon otsikot, jota täyttämällä heidän täytyi edetä tehtävässä. Pyysin merkitsemään alkuperäisen neliön sivun pituutta kirjaimella *a*. Näytin tehtävässä tarvittavat, jokaisen iteroinnin jälkeen syntyneet kuviot, dokumenttikameralla oppilaille.

i	n	A	A_k

i = iteroinnit
n = väritettyjen uusien neliöiden lukumäärä
A = uuden väritetyn neliön pinta-ala (ruutua)
A_k = väritettyjen uusien neliöiden kokonaispinta-ala (ruutua)

Ensimmäisen iteraation jälkeen saatiin alla oleva taulukon osa. Ryhmät osasivat muodostaa lausekkeet melko hyvin.

i	n	A	A_k
0	0	0	0
1	1	$\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2}{9}$	$1\cdot\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{9}$

Toisen iteraation päättely tuotti hieman enemmän vaikeuksia kuin ensimmäisen iteraation. Noin puolet ryhmistä osasi täyttää alla olevan taulukon osan.

i	n	A	A_k
0	0	0	0
1	1	$\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2}{9}$	$1\cdot\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{9}$
2	8	$\frac{a}{9}\cdot\frac{a}{9}=\frac{a^2}{81}$	$8\cdot\frac{a^2}{81}$

Kolmas iteraatio oli yhtä vaikea kuin toinen iteraatio. Noin puolet ryhmistä osasi täyttää alla olevan taulukon osan.

i	n	A	A_k
0	0	0	0
1	1	$\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2}{9}$	$1\cdot\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{9}$
2	8	$\frac{a}{9}\cdot\frac{a}{9}=\frac{a^2}{81}$	$8\cdot\frac{a^2}{81}$
3	64	$\frac{a}{27}\cdot\frac{a}{27}=\frac{a^2}{729}$	$64\cdot\frac{a^2}{729}$

Seuraavana tehtävänä täytyi kirjoittaa muuttujan n arvot ja muuttujan A nimittäjän arvot jonona sekä päättelemään jonon säännön. Lähtöarvona oli ensimmäisen iteroinnin arvo. Oppilaat huomasivat helposti, että muutujan n arvot muodostivat jonon $\{1,8,64,\ldots\}$ ja muuttujan A nimittäjän arvot jonon $\{9,81,729,\ldots\}$. Moni ryhmistä huomasi myös, että jonot olivat geometrisia siten, että ensimmäisen suhdelukuna oli 8 ja jälkimmäisen 9.

Seuraavaksi piti päätellä e.m. jonojen riippuvuus muuttujasta i. Moni ryhmistä huomasi, että muuttuja n voitiin kirjoittaa muodossa 8^{i-1} ja muuttujan A nimittäjä muodossa 9^i. Siis pinta-alan lisäys voidaan laskea lausekkeesta $8^{i-1}\cdot\frac{a^2}{9^i}$. Näin saatiin pääteltyä taulukon alla oleva viimeinen rivi.

i	n	A	A_k
x	8^{x-1}	$\frac{a^2}{9^x}$	$8^{x-1}\cdot\frac{a^2}{9^x}$

Aikaisemmin opitusta voitiin päätellä että, jos pinta-alan lisäys lähestyy nollaa iteroimalla äärettömän monta kertaa, niin pinta-alalla on yläraja. Pyysinkin siis pareja osoittamaan matemaattisesti, että lauseke $8^{x-1}\cdot\frac{a^2}{9^x}$ lähestyy nollaa, kun x lähestyy ääretöntä.

Tehtävä tuotti vaikeuksia monille pareista. Usea osasi kuitenkin aikaisemmin opiskellun perusteella kirjoittaa alkuperäisen lausekkeen muotoon $\left(\frac{8^{x-1}}{9^x}\right)\cdot a^2$. Muistutin, että 9^x voidaan kirjoittaa tuloksi $9\cdot 9^{x-1}$. Näin päästiin lausekkeeseen $\left(\frac{8^{x-1}}{9\cdot 9^{x-1}}\right)\cdot a^2$. Siis lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$\left(\frac{8^{x-1}}{9^{x-1}}\right)\cdot\frac{a^2}{9}$. Potenssisäännön avulla saadaan siis lopullinen lauseke $\left(\frac{8}{9}\right)^{x-1}\cdot\frac{a^2}{9}$. Tähän lausekkeeseen pääsi muutama pari ilman opastusta.

Usea pari huomasi, että lauseke voidaan kirjoittaa funktiona $f(x)=\left(\frac{8}{9}\right)^{x-1}\cdot\frac{a^2}{9}$, koska a^2 on alkuperäisen neliön pinta-ala ja $\left(\frac{8}{9}\right)^{x-1}$ on eksponenttifunktio. Koska kantaluku $\frac{8}{9}$ on pienempi kuin yksi, niin funktio lähestyy nollaa, kun x lähestyy ääretöntä. Siis pinta-alan lisäys lähestyy nollaa ja pinta-alan lisäyksellä on yläraja.

Kysyin vielä ryhmiltä voidaanko edellisen perusteella päätellä, että kuvio ei peity värillisistä neliöistä. Suurin osa ryhmistä oli sitä mieltä, että voidaan, koska väritetyn alueen pinta-alalla on yläraja. Muutama ryhmistä esitti kuitenkin vastakysymyksen, jossa podittiin tilannetta, jossa väritetyn alueen yläraja olisikin yhtä suuri kuin alkuperäisen kuvion pinta-ala. Keskustelun jälkeen oppilaat tulilvatkin siihen tulokseen, että olisi pitänyt laskea jäljelle jääneen värittämättömän alueen pinta-alan funktio iterointimäärien suhteen. Sen perusteella olisi voitu päätellä lopullinen vastaus kysymykseen.

En antanut oppilaille kotitehtävää koska seuraava oppitunti pidettiin atk-luokassa.

6.3.4.2 Havaintoja oppitunnista

Oppitunnin piirtämistehtävä osattiin hyvin. Ongelma koettiin myös melko mielenkiintoiseksi, sillä se herätti keskustelua. Huomasin kuitenkin, että tehtävään liittyvät laskut tuottivat vieläkin monille oppilaille vaikeuksia. Vaikeuksia tuotti varsinkin se, että alkuperäisen neliön sivun pituudeksi pyydettiin käyttämään kirjainta *a*. Jos sivun pituus olisi ollut 27 ruutua, niin tehtävä olisi ollut helpompi. Tehtävä oli muutenkin ehkä liian teoreettinen, sillä laskutehtävät kiinnostivat osaa oppilaista selvästi vähemmän kuin aikaisemmilla oppitunneilla. Tässä vaiheessa olisikin ehkä ollut parempi pitää hieman kevyempi oppitunti, jolloin olisi piirretty enemmän ja laskettu vähemmän kuin nyt tehtiin.

6.3.5 Viides oppitunti

6.3.5.1 Oppitunnin suoritus

Oppitunti tapahtui atk-luokassa, jossa jokaisella oppilaalla oli oma tietokone käytössä. Opettajan tietokone oli yhteydessä projektoriin, jonka kautta hän esitti oppitunnin tehtäviä. Oppitunnin tarkoituksena oli laajentaa fraktaalien käsitettä itseään toistavista fraktaaleista monimutkaisempiin fraktaaleihin sekä tutkia millaisia yhteyksiä fraktaaleilla on ympäröivän maailman kanssa. Tarkoituksena oli myös tutkia, miten tietokoneella voidaan laatia erilaisia fraktaaleja internetistä löytyvillä fraktaaligeneraattoreilla.

Ensimmäiseksi pyysin oppilaita etsimään internetistä kuvia Julian joukosta (kuva 5, sivu 26) ja Mandelbrotin joukosta (kuva 3, sivu 24). Tehtävänä oli perustella, miksi kyseiset kuviot ovat fraktaaleja. Moni huomasi, että molemmissa kuvissa on kuvioita, jotka toistuvat samanlaisina äärettömyyksiin asti. Oppilaat huomasivat kuvion toistumisen suurentamalla kuvia. Aikaisemmin esiintyneisiin fraktaaleihin verrattuna kuviot olivat monimutkaisia. Kerroin, että Julian joukko ja Mandelbrotin joukko ovat esimerkkejä ns. fraktaalijoukoista.

Oppitunnin toisena tehtävänä oli tutkia millaisia yhteyksiä fraktaaleilla on ympäröivän luonnon kanssa. Moni oppilas huomasi, että esimerkiksi puiden oksistot ja lehdet sekä kasvien lehdet muodostavat kuvioita, jotka toistavat itseään ja ovat siis eräänlaisia fraktaaleja. Myös monet kukkien terälehdet muodostavat fraktaalikuvioita. Monet löysivät yhteyksiä myös fraktaalien ja eläinmaailman välillä. Esimerkiksi simpukoista ja kotiloista löytyi fraktaalikuvioita. Isommista eläimistä mm. riikinkukon siivistä löytyi kuvioita, jotka muistuttivat fraktaaleja. Fraktaalikuvioita löydettiin myös vuoristojen silueteista, jokien muodostamista verkostoista, ihmisen keuhkoista ja hermostoista sekä silmän kuvioista. Huomattiin myös, että fraktaalikuviot voitiin laajentaa myös maailmankaikkeuteen, sillä jotkut tähtijärjestelmät ja kaasupilvet muodostavat fraktaalikuvioita.

Oppitunnin lopuksi oppilaat muodostivat omia fraktaalikuvioita internetistä löytyvien fraktaaligeneraattoreiden avulla. Vertailimme oppilaiden tekemiä fraktaaleja keskenään heijastamalla niitä projektorin avulla. Tulostimme myös jokaiselle oppilaalle oman fraktaalikuvan. Annoin oppitunnin lopuksi oppilaille kotitehtävän, jossa heidän piti tutustua internetin avulla fraktaaligeometrian historiaan sekä piirtää papreille oma yksinkertainen fraktaali.

6.3.5.2 Havaintoja oppitunnista

Fraktaalien tekeminen fraktaaligeneraattoreiden avulla oli tehtävä, josta oppilaat selvästi pitivät. Moni olisi halunnut jäädä tekemään niitä vielä tunnin loputtuakin. Erilaisten kuvioiden vertailu projektorin avulla oli kiinnostavaa. Luonnossa esiintyviä fraktaaleja ja omatekoisia fraktaaleja kommentoitiin runsaasti.

Monille oli yllätys se, että fraktaaleja esiintyy paljon ympärillämme olevassa maailmassa. Fraktaalijoukkojen matemaattista perustaa ei esitelty, koska se olisi ollut matemaattisesti liian vaikea asia. Oppilaat ymmärsivät kuitenkin melko hyvin fraktaalijoukon perusperiaatteen, kun erilaisia kuvioita verrattiin keskenään.

Katsoimme vielä seuraavan oppitunnin alussa oppilaiden piirtämiä fraktaaleja dokumenttikameralla. Suurin osa oppilaista osasi piirtää yksinkertaisen itseääntoistavan fraktaalin. Moni oli piirtänyt samankaltaisia puumaisia fraktaaleja, jotka haarautuivat.

7. Johtopäätökset

Viimeisen oppitunnin jälkeen oppilaat tekivät vielä uudestaan aloitustestin tehtävät. Tarkastimme tehtävät siten, että esitin oikeat ratkaisut dokumenttikameralla. Aloitustehtävän tulokset olivat parantuneet kaikilla oppilailla. Miltei puolet oppilaista osasi tehdä kaikki tehtävät oikein. Oppitunneilla oli siis myönteinen vaikutus aloitustehtävien tuloksiin.

Tein viimeisen oppitunnin jälkeen oppilaille kyselyn pidetyistä oppitunneista. Yli 60 % oppilaista oli sitä mieltä, että fraktaalien opiskelu oli erittäin mielenkiintoista. Noin 30 %:n mielestä opiskeltavat asiat olivat mielenkiintoisia ja loput noin 10 % olivat sitä mieltä, että opiskelu oli melko mielenkiintoista. Mielenkiintoisimpina asioina mainittiin fraktaalien piirtäminen ja tietokoneilla tehdyt fraktaalikuviot. Vähemmän mielenkiintoisia asioita olivat lausekkeiden matemaattiset käsittelyt. Noin 50 % oppilaista oli sitä mieltä, että oppituntien tehtävät olivat melko vaikeita. Vaikeimpia asioita olivat funktioiden lausekkeiden päättelyt ja raja-arvojen laskemiset. Kyselyn tulokset olivat melko odotetut. Huomasin jo oppituntien aikana, että ongelman pohtimiset ja fraktaalien piirtämiset onnistuivat melko hyvin. Nämä tehtävät koettiin siis mielenkiintoisiksi. Kun päättelyä jatkettiin matemaattisilla menetelmillä, niin tarvittiin usein opettajan ohjausta. Tehtävät olivat vaikeampia ja ne koettiin vähemmän mielenkiintoisiksi kuin muut tehtävät.

Huomasin jo ensimmäisten pitämieni fraktaalioppituntien jälkeen, lukuvuosina 2001-2002, että oppilaiden lähtötaso matematiikassa oli riittämätön fraktaalien opiskelemiseksi. Sen vuoksi laadin kolme edeltävää oppituntia, joissa opiskeltiin funktion, äärettömyyden ja raja-arvon perusteita. Funktion opiskelu on ollut viime vuosina yläkoulussa miltei olematonta. Huomasin, että oppilaat oppivat funktioiden opiskelussa tarvittavat joukko-opin merkinnät helposti. Ne voitaisiin siis opiskella nykyisinkin yläkoulussa. Nämä merkinnäthän poistuivat yläkoulun opetuksesta vuonna 1986, kun luovuttiin matematiikan tasokursseista. Myös funktion määrittely voitaisiin palauttaa samalle tasolle, missä se oli ennen tasokurssien poistamista. Yksi oppitunti funktion perusteista oli kuitenkin liian vähän, jotta kaikki oppilaat olisivat oppineet merkinnät ja määritelmät hyvin.

Äärettömyyden, raja-arvon ja suppenemisen määrittelyt eivät kuulu peruskoulun opetussuunnitelmaan. Ne opiskellaan vasta lukiossa. Äärettömyydestä oppilailla oli olemassa entuudestaan intuitiivinen käsitys. Onkin erikoista, että peruskoulujen oppimateriaaleissa ei käsitellä äärettömyyttä ollenkaan. Äärettömyys, raja-arvo ja suppeneminen käsiteltiin edeltävissä oppitunneissa matemaattisesti kevyesti. Yläkoulun matematiikan perusteella nämä asiat voitiin kuitenkin perustella tyydyttävästi. Äärettömyyttä, raja-arvoa ja suppenemista tarvittiin miltei kaikissa fraktaaligeometrian tehtävissä. Tehtävät olivat melko vaikeita, jos niitä verrataan useimpiin 9.luokan matematiikan tehtäviin. Suurin osa oppilaista pystyi kuitenkin laskemaan näihin käsitteisiin liittyviä tehtäviä pienen opastuksen jälkeen, joten sopivat mielestäni hyvin 9.luokan matematiikassa opiskeltaviksi asioiksi.

Fraktaaligeometrian piirtämistehtävät sopivat hyvin 9.luokkalaisille. Oppilaat pystyivät etenemään tehtävissä itsenäisesti. Myös itsesimilaarisen fraktaalin käsite ja siihen liittyvät nimitykset opittiin helposti. Oppitunteihin liittyvät kotitehtävät osattiin myös tehdä melko hyvin. Tehtävät koettiin mielenkiintoisiksi ja ehkä sen vuoksi kotitehtäviäkin tehtiin ahkerasti. Oppitunteihin liittyvät matemaattiset tehtävät olivat melko vaikeita. Pienellä opastuksella suurin osa oppilaista kuitenkin ymmärsi tehtävät.

Fraktaaligeometrian laskutehtävissä käsiteltiin paljon murtolukujen potenssilausekkeita. Olisi ollut hyvä, jos näihin lausekkeisiin olisi tutustuttu enemmän edeltävinä oppitunteina, sillä niiden käsittely tuotti vaikeuksia yllättävän monille oppilaille. Jos näitä lausekkeita olisi osattu paremmin, niin raja-arvoihin ja suppenemiseen liittyviä tehtäviä olisi osattu paremmin kuin oppitunneilla osattiin.

Miltei kaikki tehtävät tehtiin 3-4 hengen ryhmissä. Yhteistoiminnallinen oppiminen onnistui hyvin, sillä miltei pokkeuksetta kaikki oppilaat osallistuivat hyvin ryhmien työskentelyyn. Uskon, että varsinkin vähemmän edistyneet oppilaat hyötyivät tästä työskentelytavasta. Useimpien oppituntien tarkoituksena oli, että ryhmät työskentelisivät tehtäväpapereiden perusteella itsenäisesti. Näin ei aina käynyt, sillä jouduin osassa tehtäviä opastamaan ryhmiä melko paljon. Tehtäväpapereissa olevat tehtävien määrittelyt olisivat voineet olla hieman tarkempia ja selvempiä kuin tässä tutkimuksessa oli.

Oppituntien määrä oli liian vähäinen, jotta fraktaaligeometriaan liittyviä laskutehtäviä olisi voitu harjoitella riittävästi. Viisi oppituntia riitti vain perusteiden opiskeluun. Piirtämistä ja tietokoneilla tehtyjä fraktaaleja olisi ollut syytä harjoitella enemmän. Tällaisia tehtäviä voitaisiin myös tehdä yhteistyössä muiden oppiaineiden kanssa. Esimerkiksi piirtämistehtäviä voitaisiin yhdistää kuvaamataidon tunteihin tai tietokonefraktaalien tekemisen tietojenkäsittelyn tunteihin. Edistyneimmät oppilaat voisivat jopa ohjelmoida omia fraktaaleja.

Joulukuussa 2012 ilmestyneen TIMSS-tutkimuksen mukaan suomalaiset yläkoululaiset viihtyvät koulussa huonommin kuin muiden tutkimusmaiden oppilaat. Matematiikan opiskelu koetaan usein tylsäksi puurtamiseksi. Luokkien suuret koot ja heterogeeninen oppilasjoukko aiheuttavat usein oppilaiden turhautumisen. Tehtävät ovat toisille oppilaille liian helppoja ja toisille liian vaikeita, kun joudutaan opiskelemaan oppilaiden keskimääräisen etenemisen mukaisesti. Tämän tutkimuksen oppituntien ja siitä saadun palautteen perusteella fraktaaligeometrian kurssi koettiin mielenkiintoiseksi. Mielestäni tällainen viiden oppitunnin kurssi sopisi hyvin yläkoulun matematiikan opetussuunnitelmaan. Se lisäisi oppilaiden mielenkiintoa matematiikan opiskelua kohtaan. Asia on mielenkiintoista ja tietokoneen käyttö kurssin yhteydessä laajentaisi matematiikan perinteisiä opiskelumenetelmiä. Kurssi edellyttäisi kuitenkin 9. luokalla opiskeltavaksi perusteellisemman funktiokurssin kuin mitä nykyisin tehdään. Myös äärettömyyden, raja-arvon ja suppenemisen opiskelu ennen fraktaaligeometrian kurssia olisi tarpeellista.

Tässä tutkimuksessa esitellyt oppitunnit pidettiin lukuvuosina 2008-2010 kahdelle Klassillisen koulun 9. luokalle. Kyseiset luokat olivat latinan opiskelijoiden luokkia. Oppilaiden matematiikan arvosanojen keskiarvot olivat yli kahdeksan. Luokat olivat melko homogeenisia, sillä yli puolella oppilaista oli matematiikan arvosana kiitettävä. Luokkien homogeenisuus johtui siitä, että oppilaat oli valittu aikanaan pääsykokeilla latinan luokille. Näin ollen he olivat keskimääräistä motivoituneimpia ja osaavampia kuin normaalit luokat. Oppitunneilla esitetyt tehtävät olivat melko vaativia. Niiden suorittaminen onnistui kyseisillä ryhmillä melko hyvin. Uskon, että piirtämis- ja päättelytehtävät olisivat onnistuneet heterogeenisillakin oppilasryhmillä yhtä hyvin kuin tähän tutkimukseen osallistuneilla ryhmillä. Huomasin tämän vuosina 2001-2008, kun pidin fraktaaligeometrian oppitunteja useille erilaisille ryhmille. Oppituntien tehtäviin liittyvät laskutehtävät sen sijaan eivät olisi onnistuneet yhtä hyvin kuin tähän tutkimukseen osallistuneilla ryhmillä. Monet näistä laskutehtävistä vaativat kiitettävän tason osaamista. Parantaisinkin tässä tutkimuksessa esitettyjä oppitunteja siten, että vähentäisin hieman matematiikan teoriaa ja lisäisin tietokoneiden käyttöä fraktaalien piirtämisessä ja tutkimisessa. Eräs oppilaistani, joka oli perehtynyt ohjelmointiin, innostui suunnittelemaan omia, fraktaalien tekemiseen soveltuvia, ohjelmia. Vaikka ei osaisi ohjelmoidakaan, niin fraktaaligeneraattorit helpottavat omien fraktaalien tekemistä. Tulevaisuudessa matematiikan opetuksessa käytetään enemmän tietokoneavusteista opetusta. Ehkä fraktaaligeometrian kurssi voisi olla edelläkävijä tässä prosessissa.

Lähteet.

1. Laurinolli, Luoma-aho, Sankilampi, Selenius, Talvitie 2004: Laskutaito 7. WSOY. Porvoo.

2. Laurinolli, Luoma-aho, Sankilampi, Talvitie, Vähä-Vahe 2005: Laskutaito 8. WSOY. Porvoo.

3. Laurinolli, Luoma-aho, Sankilampi, Talvitie, Vähä-Vahe 2006: Laskutaito 9. WSOY. Porvoo.

4. Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela, Tahvanainen 2004: Pitkä matematiikka 1. WSOY. Porvoo

5. Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela 1998: Pitkä matematiikka 2. WSOY. Porvoo

6. Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela, Tahvanainen 2004: Pitkä matematiikka 3. WSOY. Porvoo

7. Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela, Tahvanainen 2007: Pitkä matematiikka 9. WSOY. Porvoo

8. Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela, Tahvanainen 2006: Pitkä matematiikka 7. WSOY. Porvoo

9. Yrjönsuuri, Vilenius, Laine 1976: Koululaisen matematiikka 9. Otava. Keuruu.

10. Leino, Kalla, Paasonen 1978: Matematiikan didaktiikka 2. Kirjayhtymä. Helsinki.

11. Poikela Esa 2002: Ongelmaperusteinen pedagogiikka. Tampere University. Tampere.

12. Haapasalo Lenni 1994: Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu. Gummerus. Jyväskylä.

13. Mandelbrot Benoit 1977: Fractals: form, chance and dimension. Freeman. San Francisco.

14. Cherbit G 1991: Fractals: non-integral dimensions and applications. Wiley. Chichester.

A. Kirjoita tehtävissä lukujonon kolme seuraavaa jäsentä.

1.) 1, 7, 11, 15, 19, …

2.) 12, 9, 6, 3, 0, …

3.) $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \ldots$

4.) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

5.) $3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$

6.) 1, 3, 9, 27, 81, …

7.) $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{5}, \frac{16}{7}, \frac{25}{9}, \ldots$

B. Kirjoita lukujonon 100. jäsen.

1.) 3, 5, 7, 9, 11, …

2.) 27, 22, 17, 12, 7, …

3.) 3, 6, 12, 24, 48, …

4.) 80, 40, 20, 10, 5, …

C. Kirjoita summien lauseke.

1.) 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100

2.) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$

3.) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$

D. Mitä raja-arvoa lukujonot lähestyvät?

1.) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

2.) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

3.) $10, 9, 8, 7, 6, 5, \ldots$

4.) $\frac{2}{1}, -\frac{2}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots$

5.) 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999 ; …

6.) $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \ldots$

E. Mitkä seuraavista joukoista ovat äärettömiä ja mitkä äärellisiä? Perustele vastauksesi.

1.) Joukko A = {1, 2, 3, 4, …}

2.) Kokonaislukujen joukko.

3.) Viikonpäivien joukko.

4.) Maapallon ihmisten joukko.

5.) Negatiivisten lukujen joukko.

6.) Tyhjä joukko.

7.) Murtolukujen joukko.

8.) Yhdessä puussa olevien oksien joukko.

9.) Maapallolla olevien atomien joukko.

10.) Lukujen 1 ja 2 välillä olevien kaikkien lukujen joukko.

Liite 1. Aloitustesti.

F. Ovatko seuraavat lukujonot kasvavia, väheneviä vai eivät kumpaakaan? Perustele vastauksesi.

1.) 5, 10, 15, 20, 25, …

2.) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots$

3.) -2, 2, -2, 2, -2, …

4.) 100, 90, 80, 70, 60, …

G. Mikä seuraavista on funktio? Perustele vastauksesi.

1.) $y = 2x + 1$

2.) $4x + 2y – 6 = 0$

3.) $x^2 + y^2 = 9$

4.) $y = - 2$

5.) $y = 3x^5 + 2x$

Liite 2. Aloitustestin tulokset.

Osio A.

Taulukko 1. Osion A tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
A1	88	77	81	82	95	71	100	55	86	73	100	96	100	100
A2	94	77	75	77	95	65	96	55	90	68	100	96	100	100
A3	88	54	69	64	80	59	87	45	86	64	91	87	91	92
A4	88	46	50	55	85	59	87	45	81	55	91	83	87	88
A5	76	31	56	27	75	35	83	32	71	41	86	78	91	92
A6	76	38	56	50	75	53	91	36	81	59	86	78	87	90
A7	65	23	38	23	65	24	83	18	62	27	82	57	78	80

Taulukko 2. Osio A. eri luokkatasot.

teht.	kaikki	7lk	8lk	9lk
A1	85	86	78	93
A2	85	85	77	91
A3	75	74	70	82
A4	71	66	67	82
A5	62	55	57	74
A6	68	62	67	77
A7	50	42	48	65

Taulukko 3. Osio A, latinan opiskelijat ja muut opiskelijat.

teht.	lat	ei-lat	7lat	8lat	9lat	7eilat	8eilat	9eilat
A1	95	74	93	93	98	80	64	71
A2	96	71	95	93	98	76	61	65
A3	87	60	88	86	88	63	55	59
A4	86	54	85	84	88	51	50	59
A5	81	39	78	77	85	37	36	35
A6	83	50	78	86	83	49	48	53
A7	70	26	60	73	75	27	23	24

Liite 2. Aloitustestin tulokset.

Osio B.

Taulukko 4. Osion B tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
B1	24	8	6	18	60	29	39	23	62	41	64	48	57	57
B2	12	8	0	14	40	18	35	18	57	36	50	39	52	53
B3	0	0	0	0	10	0	4	0	5	0	9	0	4	4
B4	0	0	0	0	5	0	0	0	5	0	9	0	4	4

Taulukko 5. Osio B, eri luokkatasot.

teht.	kaikki	7lk	8lk	9lk
B1	38	23	41	54
B2	31	16	36	41
B3	3	0	2	6
B4	2	0	1	5

Taulukko 6. Osio B, latinan opiskelijat ja muut opiskelijat.

teht.	lat	ei-lat	7lat	8lat	9lat	7eilat	8eilat	9eilat
B1	51	22	38	50	60	12	32	29
B2	42	18	28	45	48	8	27	18
B3	5	0	0	5	8	0	0	0
B4	3	0	0	2	6	0	0	0

Liite 2. Aloitustestin tulokset.

Osio C.

Taulukko 7. Osion C tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
C1	6	8	0	5	30	6	22	5	19	0	32	13	22	22
C2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Taulukko 8. Osio C, eri luokkatasot.

teht.	kaikki	7lk	8lk	9lk
C1	13	7	11	23
C2	0	0	0	0
C3	0	0	0	0

Taulukko 9. Osio C, latinan opiskelijat ja muut opiskelijat.

teht.	lat	ei-lat	7lat	8lat	9lat	7eilat	8eilat	9eilat
C1	21	3	10	20	28	4	2	6
C2	0	0	0	0	0	0	0	0
C3	0	0	0	0	0	0	0	0

Osio D.

Taulukko 10. Osion D tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
D1	24	15	6	14	45	18	35	14	33	9	50	26	43	43
D2	0	0	0	0	30	6	17	0	19	5	32	9	17	25
D3	12	0	0	0	40	18	30	5	29	9	45	17	43	40
D4	0	0	0	0	25	0	9	0	5	0	18	4	13	25
D5	24	15	6	5	65	41	35	5	29	18	50	17	39	65
D6	0	0	0	0	20	0	4	0	10	0	14	0	9	20

Liite 2. Aloitustestin tulokset.

Taulukko 11. Osio D, eri luokkatasot.

teht.	kaikki	7lk	8lk	9lk
D1	26	18	23	40
D2	11	2	10	22
D3	20	7	18	38
D4	6	1	3	15
D5	26	13	22	49
D6	4	0	3	11

Taulukko 12. Osio D, latinan opiskelijat ja muut opiskelijat.

teht.	lat	ei-lat	7lat	8lat	9lat	7eilat	8eilat	9eilat
D1	37	13	25	34	46	12	11	18
D2	18	2	5	18	26	0	2	6
D3	32	6	15	30	43	0	7	18
D4	11	0	3	7	18	0	0	0
D5	37	14	20	32	51	8	11	41
D6	8	0	0	7	14	0	0	0

Osio E.

Taulukko 13. Osion E tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
E1	71	54	38	50	80	59	87	68	86	50	91	83	91	90
E2	71	62	69	59	100	76	100	91	100	64	100	100	100	100
E3	94	92	56	50	100	88	100	86	100	68	100	91	100	100
E4	88	85	75	77	95	71	87	64	95	59	95	83	96	95
E5	100	92	63	73	100	82	100	86	100	59	100	96	100	100
E6	65	46	50	41	70	35	74	41	71	41	82	74	78	70
E7	100	85	88	77	100	71	100	86	100	50	100	96	100	100
E8	94	69	75	86	95	59	96	77	90	59	100	87	100	100
E9	71	62	56	59	95	59	91	68	86	55	95	83	96	95
E10	71	38	38	41	85	35	78	50	86	41	91	61	91	90

Liite 2. Aloitustestin tulokset.

Taulukko 14. Osio E, eri luokkatasot.

teht.	kaikki	7lk	8lk	9lk
E1	70	60	73	82
E2	85	74	89	95
E3	86	76	89	98
E4	81	81	76	90
E5	88	85	86	96
E6	59	56	57	68
E7	88	89	84	94
E8	83	84	81	90
E9	75	67	75	88
E10	62	51	64	78

Taulukko 15. Osio E, latinan opiskelijat ja muut opiskelijat

teht.	lat	ei-lat	7lat	8lat	9lat	7eilat	8eilat	9eilat
E1	85	52	78	86	88	47	59	59
E2	97	71	88	100	100	63	77	76
E3	98	73	93	100	100	63	77	88
E4	91	69	85	91	95	78	61	71
E5	99	74	98	100	100	75	73	82
E6	74	41	70	73	77	45	41	35
E7	99	74	98	100	100	82	68	71
E8	95	70	90	93	98	78	68	59
E9	89	58	78	89	95	59	61	59
E10	81	39	65	82	89	39	45	35

Osio F.

Taulukko 16. Osion F tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
F1	100	92	94	91	100	94	100	86	100	95	100	100	100	100
F2	71	46	50	45	95	53	91	50	86	55	91	83	96	95
F3	94	54	44	50	95	59	91	45	95	59	95	83	96	95
F4	94	77	88	86	100	88	100	73	100	86	100	100	100	100

Liite 2. Aloitustestin tulokset.

Taulukko 17. Osio F, eri luokkatasot.

teht.	kaikki	7lk	8lk	9lk
F1	96	96	95	99
F2	71	60	70	85
F3	74	66	73	88
F4	92	90	90	98

Taulukko 18. Osio F, latinan opiskelijat ja muut opiskelijat.

teht.	lat	ei-lat	7lat	8lat	9lat	7eilat	8eilat	9eilat
F1	100	92	100	100	100	92	91	94
F2	88	50	78	89	94	47	52	53
F3	93	51	88	93	95	49	52	59
F4	99	84	98	100	100	84	80	88

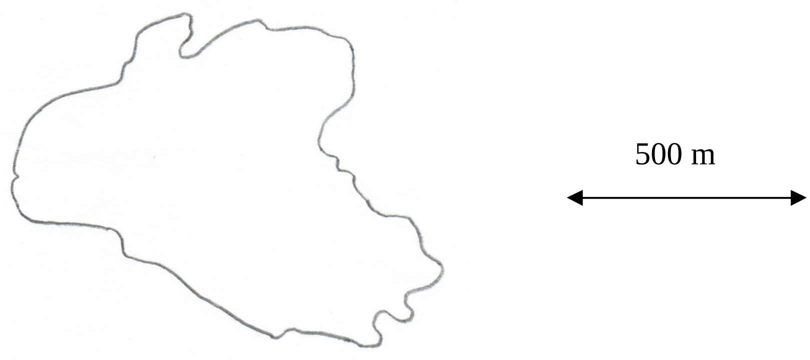
Osio G.

Taulukko 16. Osion G tulokset.

teht.	7C	7E	7EF	7G	9A	9E	8B	8E	8A	8D	9B	7C	9B	9A
G1	0	0	0	0	100	88	0	0	0	0	100	0	100	100
G2	0	0	0	0	95	59	0	0	0	0	95	0	96	95
G3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G4	0	0	0	0	95	59	0	0	0	0	95	0	96	95
G5	0	0	0	0	85	71	0	0	0	0	82	0	91	90

Liite 3. Ensimmäinen oppitunti.

1. Alla on esitetty Alasjärven kartta. Arvioi kartan perusteella kuinka pitkä on Alasjärven ympärysmitta.



Vastaus:

2. Anna hypoteesi: Voidaanko ympyrän sisälle piirtää suljettu itseäänleikkaamaton murtoviiva, jonka piiri on suurempi kuin ympyrän kehän pituus?

   Vastaus:

Piirrä alle ympyrä, jonka säde on 3,0 cm. Piirrä ympyrän sisälle mahdollisimman pitkä suljettu murtoviiva, joka ei leikkaa itseään. Laske ympyrän kehän pituus sekä mittaa ja arvioi syntyneen monikulmion piiri.

Ympyrän kehän pituus =

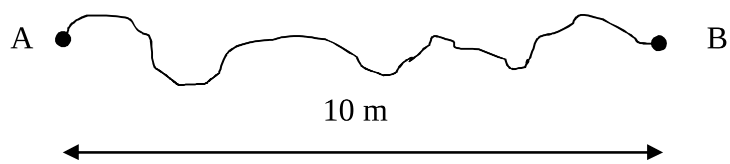
Monikulmion piiri =

Liite 3. Ensimmäinen oppitunti.

3. Arvioi uudestaan Iidesjärven ympärysmitta.

Vastaus:

4. Alla on karttasuurennos Alasjärven rannasta. Kuvan viereen on piirretty jana, jonka pituus on luonnossa 10,0 m. Arvioi kuinka pitkä on kuvaan merkitty osuus Alasjärven rantaviivasta eli viivan AB pituus.



Vastaus:

5. Piirrä alle jana AB, jonka pituus on 15,0 cm. Piirrä sen alle vapaalla kädellä viiva, joka voisi vastata omasta mielestäsi Iidesjärven rantaviivaa väliltä piste A ja piste B. Arvioi piirtämäsi viivan pituus.

Arvio:

6. Arvioi vielä kerran Iidesjärven ympärysmitta.

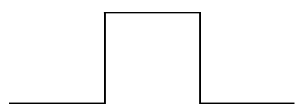
Vastaus:

Liite 4. Toinen oppitunti.

Tee piirrostehtävät takasivulla olevalle ruutupaperille ja laskutehtävät taulukkoihin.
Taulukkojen sarakkeissa olevat tunnukset ovat seuraaavat:
i = iterointikierros
n = janojen lukumäärä
l = janan pituus (ruutua)
p = kuvion piiri (ruutua)
A = kuvion pinta-ala (ruutua)
ΔA = kuvion pinta-alan muutos (ruutua)

1. Piirrä annetulle ruutupaperille neliö, jonka sivun pituus on 9 ruutua. Täytä taulukon 1 ylimmälle riville janojen lukumäärä, kuvion piiri ja pinta-ala.

2. Korvaa neliön jokainen sivu alla olevalla murtoviivalla. Täytä taulukkoon 1 ensimmäisen iteraation kohdalle janojen lukumäärä, kuvion piiri ja pinta-ala.



3. Piirrä toinen iteraatio, jossa korvaat jokaisen edellisen kuvion janat generoijalla. Väritä kuvio. Täytä taulukkoon 1 toisen iteraation kohdalle janojen lukumäärä, kuvion piiri ja pinta-ala.

4. Päättele kolmannen iteraation arvot taulukkoon 1. Muodosta ensin lausekkeet.

Taulukko 1.

i	n	l	p	A
0				
1				
2				
3				

Liite 4. Toinen oppitunti.

5. Arvioi kuinka suuriksi piiri ja pinta-ala kasvavat, jos tehdään äärettömän monta iteraatiota. Perustele vastauksesi.

   Piiri p:

   Pinta-ala A:

   Perustelu:

6. Merkitse janojen lukumäärät ja janojen pituudet potensseina alla olevaan taulukkoon. Päättele, miten voit merkitä janojen lukumäärät ja janojen pituudet muuttujan *x* avulla. Merkitse lausekkeet taulukkoon.

Taulukko 2.

i	*n*	*l*
0		
1		
2		
3		
4		
x		

7. Muodosta kuvion piirin lauseke muuttujan *x* avulla. Mitä lukua piirin lauseke lähestyy, kun *x* kasvaa äärettömän suureksi? Perustele vastauksesi.

Piirin lauseke:

Vastaus:

Perustelu:

Liite 4. Toinen oppitunti.

8. a) Kirjoita taulukkoon 3 lausekkeet pinta-alan muutoksille 3. ja 4. iteraatiolle ja laske muutosten arvot.

   b) Päättele taulukkoon 3 lauseke pinta-alan muutokselle, kun iteraatiokierrosta merkitään muuttujalla *x*.

Taulukko 3.

i	ΔA
0	
1	
2	
3	
4	
x	

9. Päättele mitä lukua funktio $\Delta A(x)$ lähestyy, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Perustele vastauksesi.

Vastaus:

Perustelu:

10. Mitä voit päätellä pinta-alan suuruudesta, kun tehdään äärettömän monta iteraatiota? Perustele vastauksesi.

Vastaus:

Perustelu:

Liite 5. Kolmas oppitunti.

Tee piirrostehtävät ruutupaperille ja laskutehtävät taulukkoon.
Taulukossa olevat merkinnät ovat seuraavat:
i = iterointikierros
n = janojen lukumäärä
l = janan pituus (ruutua)
p = janojen yhteispituus (ruutua)

1. Piirrä ruutupaperille alustajaksi jana, jonka pituus on 27 ruutua. Täytä taulukko alustajan kohdalta.

2. Tee generoija seuraavasti: jaa jana kolmeen yhtä pitkään osaan ja poista keskimmäinen osa siten, että jäljelle jää kaksi erillistä janaa. Piirrä ensimmäinen iterointi alustajan alapuolelle ja täytä taulukkoon ensimmäisen iteroinnin tulokset.

3. Piirrä edellisten kuvioiden alapuolelle toinen, kolmas ja neljäs iterointi ja täytä taulukkoa. (Huom! Tee iterointi aina jokaiselle uudelle janalle.)

4. Päättele janojen lukumäärän, janan pituuden ja janojen yhteispituuden laskulausekkeet, kun tehdään x iterointia. Täytä taulukko.

5. Muodosta janojen yhteispituuden funktio $p(x)$ ja sievennä se. Päättele, mitä lukua funktio lähestyy, kun x kasvaa äärettömän suureksi. Perustele vastauksesi.

6. Mitä voit päätellä janojen yhteispituudesta, kun tehdään äärettömän monta iteraatiota? Perustele vastauksesi.

i	n	l	p
0			
1			
2			
3			
4			
x			

Liite 6. Neljäs oppitunti.

Täytä alla oleva taulukko ensimmäisestä iteroinnista lähtien.

Vihje: Laske kotitehtävän kuviosta kolmen ensimmäisen iteraation

i	n	A	A_k
0	0	0	0
1			
2			
3			
x			

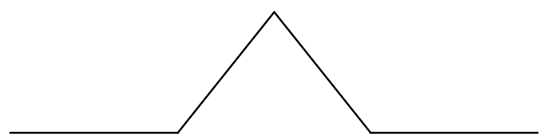
Taulukossa olevat sarakkeet ovat:

i = iteroinnit
n = väritettyjen uusien neliöiden lukumäärä
A = uuden väritetyn neliön pinta-ala (ruutua)
A_k = väritettyjen uusien neliöiden kokonaispinta-ala (ruutua)

Liite 7. Toisen oppitunnin kotitehtävä.

1. Piirrä alustaja, joka on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 9 cm. Piirrä kolmio harpin avulla.

2. Korvaa jokainen kolmion sivu generoijalla, joka on alla esitetty murtoviiva. Kolmion sivu jaetaan ensin kolmeen yhtä pitkään osaan. Keskimmäinen osa korvataan kahdella yhtä pitkällä janalla. Murtoviivan kaikki janat ovat siis pituudeltaan 3 cm.



3. Piirrä vielä toinen iterointikierros ja täytä alla olevaan taulukkoon kuvion piirin ja pinta-alan lausekkeet. Merkitään alkuperäistä pinta-alaa kirjaimella A. Iterointikierrosten jälkeiset pinta-alojen lausekkeet merkitään A:n avulla. Kirjain i tarkoittaa iterointikierrosta, n kuviossa olevien janojen lukumäärää, l janan pituutta, p kuvion piirin pituutta ja ΔA pinta-alan lisäystä. Pituuden yksikkönä on cm ja pinta-alan yksikkönä cm^2.

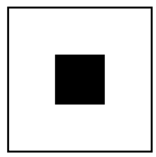
i	*n*	*l*	*p*	*ΔA*
0	3	9	$3 \cdot 9 = 27$	0
1				
2				
3				
4				
n				

4. Päättele taulukkoon 3. ja 4.iteroinnin tulokset. Kirjoita vielä lausekkeet n. iteroinnille.

5. Kuinka suureksi piiri kasvaa, kun tehdään äärettömän monta iterointia? Kuinka suureksi pinta-ala kasvaa, kun tehdään äärettömän monta iteraatiota?

Liite 8. Kolmannen oppitunnin kotitehtävä.

Piirrä alla olevaan ruudukkoon neliö, jonka sivun pituus on 27 ruutua. Tämä neliö on tehtävän alustaja. Generoijana on alla oleva kuvio.



Iterointi tehdään siis siten, että kuvioon jääneiden samansuuruisten valkoisten neliöiden keskimmäinen osa väritetään.

Vihje: Jaa ensin alustaja yhdeksään samansuuruiseen neliöön jakamalla neliön sivu kolmeen yhtäpitkään osaan. Jatka iterointia samalla tavalla.

Arvioi kuvion piirtämisen jälkeen peittyykö alustaja kokonaan väritetyillä neliöillä, kun iteroidaan äärettömän monta kertaa. Perustele vastauksesi.